

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

પુસ્તક વિવેચન, સમજ અને ઉપયોગી અનુમાનો સાથે.
છટ્ટા ધારણના વિદ્યાર્થીઓ સાર.

રચનાર.

માણેકલાલ નાગરદાસ શાહ,

રાજકોટ વિક્ટોરિયા જ્યુનિયરી તાલુકાસ્થલ હેડમાસ્ટર અને
કાઠિયાવાડ એજન્સિ વકીલ.
સસમેવ જયતે.



આવૃત્તિ પહેલી.

અમદાવાદ.

મામાની હવેલી મધ્યે યુનાઇટેડ પ્રિન્ટિંગ અને બનરલ
એજન્સિ કંપની "કિમિટેડના" પ્રેસમાં

રાણછોડલાલ ગંગારામે છાપ્યાં.

સંવત ૧૯૪૫.

સને ૧૮૮૯.

કીમત ચાર આના.

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

પુષ્કળ વિવેચન, સમજ અને ઉપયોગી અનુમાનો સાથે.
છઠ્ઠા ધોરણના વિદ્યાર્થીઓ સાર.

રચનાર.

માણેકલાલ નાગરદાસ શાહ,

રાજકોટ વિક્ટોરિયા જ્યુબિલી તાલુકાસ્કલ હેડમાસ્ટર અને,
કાઠિઆવાડ એજન્સિ વકીલ.

સસમેવ જયતે.



આવૃત્તિ પહેલી.

અમદાવાદ.

મામાની હવેલી મધ્યે યુનાઇટેડ પ્રિન્ટિંગ અને જનરલ
એજન્સિ કંપની “લિમિટેડના” પ્રેસમાં

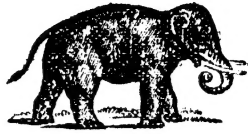
રણછોડલાલ ગંગારામે છાપ્યાં.

સંવત ૧૯૪૫.

સને ૧૮૮૯.

કીમત ચાર આના.

સને ૧૮૬૭ ના ૨૫ મા આક્ટ
પ્રમાણે રજીસ્ટર કરાવીછે.



અર્પણ પત્રિકા.

કહરદાન મુરખી શ્રી રાવખલાદુર ગોપાળજી સુરભાઈ દેશાઈ,
આસિસ્ટન્ટ એજ્યુકેશનલ ઈન્સ્પેક્ટર પ્રાંત કાઠિઆવાડ અને
ટ્રેસો ઓફ ધી યુનિવર્સિટી.

કામ કરવાની આવડ અને ઉંડી સમજ, તીવ્ર અને
શોધક બુદ્ધિ, તથા ખતિલાપણા સાથે અખંડ ઉચ્ચ ઉદ્યોગ-
માંજ મગ્ન, એ આદિ આપના સર્વોત્તમ સદ્ગુણોવડે આ
કાઠિઆવાડમાંથી અજ્ઞાનરૂપી અધકાર નીકળી, આવો જ્ઞાનરૂપી
સૂર્ય પ્રકાશ્યો; તેનું ધાતું ખરું માન આપનેજ ઘટે છે. માટે;
તેની મુખ્યારક યાદગીરી ગિરંકાળ રહેવા સાર કેળવણી ખા-
તાને ઉપયોગી એવું આ લઘુ પુસ્તક હું આપની રજા લઈ
અતિ નમ્રતાથી આપને અર્પણ કરી અથાગ હર્ષિત થાઉં છું.

તા. ૧લી જુલાઈ
૧૮૮૯.
રાજકોટ.

લી. ચર્ણુરજ સેવક,
ભાણુકલાલ નાગરદાશ શાહ.
વિક્ટોરિયા જ્યુબિલી તાલુકા સ્કૂલ હેડમાસ્ટર.
રાજકોટ.

પ્રસ્તાવના.

ગૂજરાતી નિશાળોના છઠ્ઠા ધોરણમાં હાલમાં સરકારે ભૂમિતિનો વિષય દાખલ કરેલો છે. આ વિષય પર ગૂજરાતી ભાષામાં બે એક પુસ્તકો છે પરંતુ નિશાળોમાં ચલાવવા યોગ્ય શુદ્ધ, સરળ અને યથાર્થ પુસ્તકની મને જરૂર જણાતાં બે ત્રણ અંગ્રેજી, ગૂજરાતી તથા મરેઠી પુસ્તકોને આધારે અને શીખવવામાં શું શું અગત્યનું છે અને કેવી કેવી અડચણો પડે છે એ વગેરે બાબત મારો પોતિકો અનુભવ બેળીને આ પુસ્તક તૈયાર કર્યું છે. મારા પરમ પ્રીતિમિત્ર રાજ્યમાન રાજેશ્રી કેશવલાલ સખીદાસ સંઘાણી, આસિસ્ટન્ટ એન્જિનિયર માલેગામ જીલ્લે ખાનદેશ. એમણે, આ પુસ્તક અથથી ધતિ સૂધી વાંચી યોગ્ય ફેરફાર કરવા ભલામણ કીધી છે માટે, આ પ્રસંગે તેમનો ઉપકાર માનું છું. અને હજી કોઈ સજ્જનને કાંઈ દોષ જણાય તો તેમણે જણાવવા મેહેરબાની કરવી કે, ખીજી આવૃત્તિમાં સુધારો કરવાનું બને.

આ પુસ્તકમાં કેટલીક પ્રતિજ્ઞાઓ એકથી વધારે રીતે સિદ્ધ કરી બતાવી છે; પુષ્કળ વિવેચન અને સમજાવટ આપી છે; ઉપરાંત વિદ્યાર્થીઓની બુદ્ધિ ખીલવવાને થોડાં એક ઉપયોગી અનુમાનો આપવાને આપણા, લોક પ્રીય અને ખતિલા આસિસ્ટન્ટ ઈન્સ્પેક્ટર શા. આ. ગોપાળજીભાઈએ સૂચના કરી તે મોટા ઉપકાર સાથે સ્વીકારી, તેવાં અનુમાનો જેજે પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી સિદ્ધ થઈ શકે છે તે તે પ્રતિજ્ઞાઓ નીચે છેવટે આપ્યાં છે.

શિક્ષકોને સૂચના.

ભૂમિતિનો વિષય શીખવવાનું કામ બહુ કઠણ છે એવી કેટલાક શિક્ષકો ખૂબો પાડે છે; અલબત્ત આ વિષય કઠણ છે એમાં શક નથી; પરંતુ યોગ્ય પદ્ધતિસર અને ચતુરાઈથી શિક્ષક શીખવે તો, સરળતાથી શીખવી શકે છે.

પ્રથમ વ્યાખ્યાઓ સારી પેઠે સમજાવવી. દરેક વ્યાખ્યા શીખવતી વખતે પાટીઆ પર તેવા આકારો કાઢી બતાવવા અગર કાગળના આકારો કરી બતાવવા કે, લાકડાના આકારો હોય તો બતાવવા. અને બની શકે તેટલા પ્રલક્ષ દાખલા બતાવવા. જેમકે, પંદરમી વ્યાખ્યા શીખવતી વખતે ગાડીના પેડાનો દાખલો લેવો. તેમાં મધ્ય બિંદુ, પરિધ અને ત્રિજ્યાઓનો સંબંધ બતાવવો. આથી વિદ્યાર્થીઓને પાકું જ્ઞાન થશે. તેજ પ્રમાણે સ્વીકૃત પક્ષો અને પ્રલક્ષ પ્રમાણો સમજાવવાં.

આકૃતિઓ નિશાળીઆ લગભગ ખરી અને ઝડપથી કાઢી શકે એવો મહાવરો કરાવવો.

દરેક પ્રતિજ્ઞા શીખવતી વખતે પ્રથમ તેનો ઉપન્યાસ શું છે અને સિદ્ધ કરવાની બાબત શી છે એ બે બાબતો ખૂબી પાડી વિદ્યાર્થીઓને પાકી સમજાવવી.

પ્રતિજ્ઞાઓ સિદ્ધ કરવામાં બાળુઓ અને ખૂણાઓનું સમાન પણું બતાવવાને અક્ષરોથી બોલી કે લખી બતાવવાની રીત છે. પણ શીખવતી વખતે નિશાળીઆઓ આગળ, મોઢે સિદ્ધ કરી બતાવવામાં શિક્ષકે સમાન પણું બતાવવાને એક સરખા આંકડા લેવાથી નિશાળીઆના લક્ષમાં બહુ તાળું યાદ રહેશે જેમકે, પહેલી પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં અંક તથા અંચ બાળુ બરાબર થઈ એ યાદ રહેવાને એ બંને બાળુ ઉપર એકડો * લખવો તેમજ અંચ તથા અંક બાળુઓ બરાબર બતાવવાને તેમાં પણ એકડોજ મૂકવો. એટલે, એ ત્રણે બાળુઓ ચરસપરસ બરાબર છે એ સ્મૃતિમાં તાળું રહેશે. આ પ્રમાણે આંકડાનો ઉપયોગ વિચાર કરી ઠેકાણે ઠેકાણે કરવો.

ચોપડીમાં લખ્યા છે તે શિવાય બીજા અક્ષરો લેખને અગર આંકડા લઈને કે, અક્ષરો કાઢી નાંખીને, નિશાળીઆઓ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરે એવી શિક્ષકે ટેવ પાડવી. કેમકે, તેના તેજ અક્ષરો હમેશાં રાખવાથી નિશાળીઆ જોખણુજી બની જાય છે. પાકું સમજતા નથી અને પરીક્ષામાં નાપાસ થાય છે. માટે, આ બાબત શિક્ષકોએ અવશ્ય લક્ષમાં રાખવાની છે.

વળી, પ્રમેયસિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવા સાર કાગળના કે લૂગડાના કડકાના તેવા આકારો બનાવી અગર લાકડાના આકારો હોય તો તેમાં ઉપન્યાસમાં હહેલી અને સિદ્ધ કરવાની કે સિદ્ધ કરેલી બાબતો પ્રત્યક્ષ બતાવી શિક્ષકે ખાતરી કરાવવી.

થોડી એક પ્રતિજ્ઞાઓ એવી છે કે જેના ઉપન્યાસમાં † બંને બાબતો બીજકૃત સ્વતંત્ર આપેલી છે; તેમજ કેટલીક પ્રતિજ્ઞાઓમાં બંને ત્રણ ત્રણ બાબતો સિદ્ધ × કરવાની આવે છે; કે, જો, તેઓને જુદી પાડીને લખે તો, ખરેખર જુદી જુદી પ્રતિજ્ઞાઓ થાય. પણ તેમ કરવાથી બહુ લંબાણ થઈ જાય માટે, એકજ પ્રતિજ્ઞાઓમાં સંબંધ રાખતી બાબતો મૂળ અંચકારે એકડી ગોઠવી છે. એવી બાબતો પાકી સમજાય, અને શીખનાર તથા શીખવનારને ગુંચવણ ન પડે માટે, આ પુસ્તકમાં નંબર પાડી એવી બાબતો એવી પ્રતિજ્ઞાઓમાં જુદી બતાવી છે. માટે શિક્ષકે એવા જૂદા જૂદા કડકા બરાબર સમજાવી તેમને એકઠા કરી છેવટે આખો સિદ્ધાંત જોડાવવો. અગર વખત મળે તો દરેક કડકો જુદે જુદે દહાડે શીખવવો, ભૂમિતિ શીખવવાનો વખત એકાંતરે રાખવો એ બસ છે.

આ વિષયમાં નવી શીખવવાની બાબત પાછળ શીખેલી બાબત ઉપર બહુ આધાર રાખે છે. માટે, દરેક બાબત પાકી થયા શિવાય આગળ નવી બાબત શરૂ કરવી નહિ. એટલે પેહેલેથીજ પાકું શીખવો.

* બગડો અગર પાંચડો કે સાતડો ગમે તે સમાન આંકડો લખો.

† ૫, ૨૮, પ્રાતજ્ઞા જુઓ.

× ૪, ૨૧, ૨૬, ૨૯, ૩૨, ૩૩, ૩૪ પ્રતિજ્ઞા જુઓ.

શુદ્ધિ પત્ર.

પૃષ્ઠ.	સ્થળ.	અશુદ્ધ.	શુદ્ધ.
૨	૧૯ મી વ્યાખ્યાની આકૃતિમાં.	ઉપલા ભાગમાં કાંઈ લખ્યું નથી.	ખંડ.
૩	૨૪ મી „ „	ત્રિકોણની એક બાજુ ઉપર આંકડો ભર્યો નથી.	૫
૪	૩૦ મી „ „	સમાંતર સમબાજુ ચો- ખૂણાની એક બાજુ ઉ- પર આંકડો ભર્યો નથી.	૮
૫	ટિકામાં છેલ્લી લીટી.	ત ભૂ. ફ. મ.	ત ભૂ. ફ. પ્ર.
૧૨	૫મી પ્રતિજ્ઞાની ૭મી લીટી.	(૨૨વી. પ્ર.)	પાંચમી પ્રતિજ્ઞાની પહેલી બાબત એકજ સિદ્ધ કરવી હોય તો, આ ઠેકાણે (૨- ૨વી. પ્ર.) એમ નોંધએ પણ બીજી બાબત સિદ્ધ કરવી હોયતો જરૂર નથી. કેમકે, ઉપન્યાસમાંજ બા- બુઓ વધારવાનું આપેલું છે.
૨૫	૯ મી લીટી.	સાંધો.	વધારો.
૪૧	૩૫ મી પ્રતિજ્ઞાની ૧ લીટી.	અકજ.	એકજ
૪૨	૩૬ પ્રતિજ્ઞાની ૧ લીટી.	(ચર્ક તથા રૂઢ)	(ચર્ક તથા રૂઢ)

ભૂમિતિનાં મૂળતત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

ભૂમિતિ^{*}=(ભૂ-પૃથ્વી+મા-માપવું+તિ-પણું) પૃથ્વી (જમીન) ની માપણીની વિદ્યા. પણ, હાલ તો આકારના ગુણોનું શાસ્ત્ર એ અર્થમાં વપરાય છે.

શીખવાના કાયદા:-૧ તર્ક, તોલન અને સ્મરણાદિ શક્તિઓ પ્રયુજ થાય છે. ૨ જમીન અને પર્વતોની માપણી કરવામાં અને આકાશી પદાર્થોનાં અંતર જાણવામાં મદદ મળે છે. ૩ મનને આનંદ થાય છે.

વ્યાખ્યાઓ.

૧. બિંદુ તેજ, જેને સ્થિતિમાત્ર છે; પણ ભાગો નથી.

૨. લીટી તેજ, જેને માત્ર લંબાઈ છે; પણ પહોળાઈ નથી. બિંદુઓને સાંધવાથી લીટી થાય છે.

૩. લીટીના છેડાઓ બિંદુ હોય છે.

૪. સીધીલીટી તેજ, જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોય છે.

૫. સફાઈ તેજ, જેને લંબાઈ તથા પહોળાઈ માત્ર હોય છે.

૬. સદ્ધાધના છેડાઓ લીટીઓ હોય છે.

૭. સપાટ સફાઈ તેજ, જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોય છે.

૮. સમતલ ટૂંકો તેજ, જે એક સદ્ધાધમાં એકઠી મળે છે, પણ એકજ દિશામાં નથી; એવી જો લીટીઓનો પરસ્પરનો ઝોંક (વલણ) છે.

૯. સમતલ સીધી લીટી ટૂંકો તેજ, જેઓ એકઠી મળે છે પણ એકજ સીધી લીટીમાં નથી, એવી જો સીધી લીટીઓનો પરસ્પરનો ઝોંક છે. (નીચે પ્રમાણે તેના ત્રણ પ્રકાર છે.)

૧૦. (૧) કાટઘૂંટણો જ્યારે એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી ઉપર

(એકે તરફ નમ્યા વગર) પડીને, પાસપાસેના ખૂણા બરાબર કરે છે. ત્યારે, આ ખૂણાઓ માંહેલા પ્રત્યેકને કાટખૂણો કહે છે. અને આ લીટીઓ માંહેલી પ્રત્યેક બીજી ઉપર લંબ છે એવું કહેવાય છે.

કાટખૂણો
લીટી ૧૬

* આ વિધાનો પ્રથમ ગ્રીસ દેશમાં શોધ થયો છે.

૧૧. (૨) પહોઠો લૂણો તેજ, જે કાટખૂણા કરતાં મોટો હોય છે.

૧૨. (૩) સાંકડો લૂણો તેજ, જે કાટખૂણા કરતાં નાનો હોય છે.

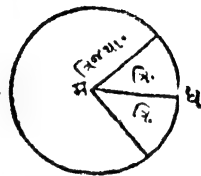
૧૩. સીમા અથવા મર્યાદા તેજ, જે કોઈ વસ્તુનો છેડો.

૧૪. આકૃતિ તેજ, જે સફાઈની હદ સધળી તરફથી એક અથવા વધારે લીટીઓથી થએલી છે.

૧૫. ગોઠ તેજ સપાટઆકૃતિ કે, જેની હદ એક અખંડ લીટીથી રિ

થયેલી છે. અને તે અખંડ લીટીને તેના ઘેર અથવા

પરિધ કહે છે. ગોળમાં એવું એક મુકરર બિંદુ છે કે, પ જેમાંથી તેના પરિધ સુધી દોરેલી સધળી લીટીઓ અરસપરસ બરાબર છે.



૧૬. આ બિંદુ (જેમાંથી બરાબર લીટીઓ દોરી છે) ને ગોઠનું મધ્ય-બિંદુ કહે છે. મધ્યબિંદુથી પરિધ સુધી દોરેલી લીટીને ત્રિજ્યા કહે છે. (ગુઓ ઉપલી આકૃતિ)

૧૭. ગોઠનો વ્યાસ તેજ સીધી લીટી, જે મધ્યબિંદુની પાર દોરેલી અને જેના છેડા બંને તરફ પરિધમાં હોય છે. (નિન્માથી વ્યાસ બમણો છે.)



૧૮. મર્દગોઠ તેજ આકૃતિ કે, જેની હદ વ્યાસથી તથા વ્યાસથી કપાયેલા ગોળના ભાગથી થયેલી છે. (ઉપલી આકૃતિ ગુઓ.)

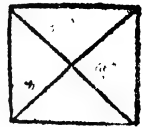
૧૯. ગોઠનો ચંડ તેજ આકૃતિ કે, જેની હદ એક સીધા લીટીથી તથા તેનાથી કપાયેલા પરિધના ભાગથી થયેલી છે.



૨૦. સીધીલીટીઆકૃતિ તેજ કે, જે આકૃતિની હદ માત્ર સીધી લીટીઓથી થયેલી હોય છે. (નીચે પ્રમાણે તેના ત્રણ પ્રકાર છે.)

૨૧. (૧) ત્રિકોણ તેજ સીધીલીટીઆકૃતિ કે, જેની હદ ત્રણ બાજુઓથી થયેલી છે.

૨૨. (૨) ચોત્ત્રણાકૃતિ તેજ, જેની હદ ચાર બાજુઓથી થયેલી છે; ચોખ્ખાકૃતિના સામસામેના—પાસપાસેના નહિ—ખૂણાઓનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓને તેની કર્ણલીટીઓ કહેછે.



૨૩. (૩) બહુચૂળ તેજ, સીધીલીટીઆકૃતિ કે, જેની હદ ચાર કરતાં વધારે બાજુઓથી થયેલી છે. ખૂણાની સંખ્યા પ્રમાણે તેને પંચખૂણ, પટખૂણ, સપ્તખૂણ ઇત્યાદિ પણ કહેછે.

ત્રિકોણો.

૨૪. (૧) સમત્રાજુ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ બરાબર છે.



૨૫. (૨) સમદ્વિત્રાજુ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણની માત્ર બેજ બાજુઓ બરાબર છે.



૨૬. (૩) વિષમત્રાજુ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓ બરાબર નથી.



૨૭. (૪) કાટચૂળ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણમાં એક ખૂણો કાટખૂણો છે. કાટખૂણાની સામેની બાજુને કર્ણ કહેછે.



૨૮. (૫) પહોઠચૂળ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણમાં એક પહોળો ખૂણો છે.



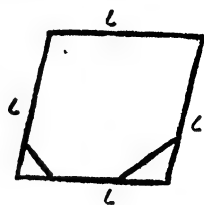
૨૯. (૬) સાંકડચૂળ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણમાં ત્રણે સાંકડા ખૂણો છે.



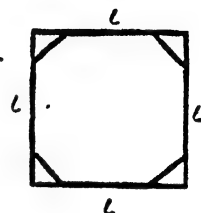
ચોખ્ખી.

૨૯. (અ) સમાંતરવાજુ ચોંચૂળ* તેજ, ચોખ્ખીકૃતિ કે,જેની બંને તરફની સામસામેની બાજુઓ સમાંતર છે.(તેના નીચે પ્રમાણે ચાર પ્રકાર છે.)

૩૦. (૧) સમાંતર સમવાજુ ચોંચૂળ, જે ચોખ્ખીકૃતિની ચારે બાજુઓ બરાબર છે; પણ ખૂણા બરાબર નથી. તેને લૉન્જ અથવા રૉમ્બસ પણ કહેછે.

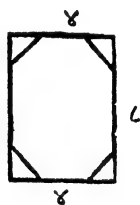


૩૧. (૨) ચોરસ, જે ચોખ્ખીની ચારે બાજુઓ બરાબર છે અને ચારે ખૂણા કાટખૂણા (બરાબર) છે. અથવા સમખૂણુ લૉન્જને ચોરસ કહેછે.

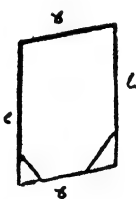


(ઉપરની બંને વ્યાખ્યાઓમાં માત્ર ખૂણાઓનોજ તફાવત છે.)

૩૨. (૩) દીર્ઘસમગ્ધૂળચોંચૂળ, જે ચોખ્ખીની સામસામેની બાજુઓ બરાબર પણ પાસપાસેની બાજુઓ બરાબર નથી; અને સઘળા ખૂણા કાટખૂણા છે. એને કાટચૂળ ચોંચૂળ અથવા લંબચોરસ પણ કહેછે.



૩૩. (૪) દીર્ઘવિષમચૂળચોંચૂળ, જે ચોખ્ખીની સામસામેની બાજુઓ બરાબર છે, પણ પાસપાસેની બાજુઓ બરાબર નથી; અને ખૂણા કાટખૂણા નથી. એને રૉમ્બાઈડ પણ કહેછે.



(ઉપરની બંને વ્યાખ્યાઓમાં માત્ર ખૂણાઓનોજ તફાવત છે.)

*પાંત્રીશમી વ્યાખ્યા પ્રથમ સમજાવ્યા પછી આ અને નીચેની વ્યાખ્યાઓ સમજાવવી. મૂળ અંથના ક્રમને વળગી રહેવા અહીં વ્યાખ્યાઓનો ક્રમ ફેરવ્યો નથી.

નિકોણ અને ચોખ્ખીના નૂદા નૂદા પ્રકાર સમજવાને આકૃતિની બાજુઓમાં આંકડા મૂકેલા છે. અને જરૂર છે ત્યાં ખૂણાઓમાં પણ નિશાની કરી છે.

૩૪. ખીજી સધળી ચોખ્ખૂણાકૃતિઓને ચતુઃસીમા (ત્રાપીજ્યમ*) કહેછે.

૩૫. સમાંતર* સીધી લીટીઓ તેજ, જે લીટીઓ એકજ સપ્તાઇમાં છે. અને તેમને બંને દિશામાં ગમે તેટલી વધારીએ તોપણ કદિ મળે નહિ.

સ્વીકૃત પક્ષો.

એવું સ્વીકારેલું (કબૂલ રાખેલું) છે કે:—

૧. કોઇપણ એક બિંદુથી કોઇપણ બીજા બિંદુસુધી એક સીધી લીટી દોરી શકાય છે.

૨. અંતવાન સીધી લીટી ગમે તેટલી લંબાઈ સુધી એક સીધી લીટીમાં વધારી શકાય છે.

૩. કોઇપણ મધ્યબિંદુ ધારીને તે મધ્યબિંદુથી કોઇપણ અંતરે એક ગોળ દોરી શકાય છે.

પ્રત્યક્ષ (ખુદ્દાં) પ્રમાણો.

૧. જે પરિમિતો*—માપઅથવાઆકૃતિ—એકજ પરિમિતની બરાબર છે, તેઓ અરસ્પરસ બરાબર છે.

૨. જે સમપરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવ્યાં તો, સર્વાળો સંમ થશે. જેમકે, ૧૫, ૧૫ તેમાં ૫, ૫ મેળવ્યાં તો સર્વાળો ૨૦, ૨૦ થશે.

૩. જે સમપરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કીધાં તો, બાકી સમ રહેશે. જેમકે ૧૫, ૧૫ તેમાંથી ૫, ૫ બાદ કરીએ તો બાકી ૧૦, ૧૦.

૪. જે વિષમ પરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવ્યાં તો, સર્વાળો વિષમ થશે. જેમકે, ૧૫, ૨૦ તેમાં ૪, ૪ મેળવ્યા તો ૧૯, ૨૪.

* એક તરફની સામસામેની (અં બ તથા ક ડ) જ બે બાજુઓની જેડ સમાંતર પણ ખીજી તરફની સામસામેની (અં ક તથા બ ડ) બે બાજુઓની જેડ સમાંતર નહિ એવા ચોખ્ખૂણાને ત્રાપીજ્યોઈડ કહેછે. [અ એનો ત્રાપીજ્યમમાં સમાવેશ થાય છે.



* ઓછામાં ઓછી બે લીટીઓ હોય ત્યારે એક ખીજી સાથે સમાંતર થઈ શકે.

× પરિમિત=(પરિ-ચોતરફ+મા-માપવું+ત. ભૂ. ક. મ.) ચોતરફનું માપ.

૫. જે વિષય પરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કીધાં તો, બાકી વિષય રહેશે. જેમકે, ૨૦, ૨૫ માંથી ૫, ૫ બાદ કરીએ તો ૧૫, ૨૦.

૬. એકજ અથવા બરાબર પરિમિતોની ખમણાઈઓ બરાબર છે.

૭. એકજ અથવા બરાબર પરિમિતોનાં અર્થો બરાબર છે.

૮. જે પરિમિતો અસ્પર્શ મળી જાયછે, અથવા એકજ અવકાશની માંહે બરાબર માર્ગ રહેછે, તેઓ બરાબર છે.

૯. આખું તેના ભાગ કરતાં મોટું છે.

૧૦. જે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરી શકતી નથી.

૧૧. સઘળા કાટખૂણા બરાબર હોયછે.

૧૨.* જે બે (અથવા તથા કંઈ) સીધી લીટીઓને એક (ઈં) સીધી લીટી એવી રીતે છેદે કે, તેની એક બાજુના (અથવા તથા કંઈ) માંહેના ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થાય, અથવા તે બાજુ બહાર બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા ખૂણા છે તે બાજુ બહાર બે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તો, તેઓ મળશે. પણ જે તે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર હોય અથવા તે કરતાં વધારે હોય તો, તે તરફ તે બે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તો કદિ મળશે નહિ.

અન્ય શબ્દના અર્થ.

૧. પ્રતિજ્ઞા—ભૂમિતિમાં તર્ક કર્યાંથી જે પરિણામો નીકળેછે તે.

૨. પ્રતિજ્ઞાઓ બે જાતની છે. ૧ કૃત્ય. ૨ પ્રમેય.

૩. કૃત્ય—જેમાં કાંઈ કરવાનું કહેલું છે. જે માગેલું હોય તે આંકણી તથા કંપાસની મદદથી શી રીતે થઈ શકે, તે બતાવવું તે કૃત્યનું સાધન છે. સાધનમાં દેખાડેલી રીતથી માગેલું પરિણામ બરાબર મળેછે કે નહિ તે સિદ્ધ કરવું એજ કૃત્ય સિદ્ધાંતોમાં સિદ્ધતા છે.

૪. પ્રમેય—જેમાં કાંઈ તત્વની સત્યતા કહેલી છે તે. જે પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો અને વ્યાખ્યાઓ અથવા તે પ્રમેયની પૂર્વે અને તેના ઉપર આધાર ન રાખતાં સિદ્ધ કીધેલી બીજી સત્યતાઓમાંથી કહેલા તત્વની સત્યતા કેવી રીતે નીકળી શકે, તે બતાવવું એ પ્રમેય સિદ્ધાંતોમાં સિદ્ધતાનો વિષય છે.

* આ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ અઠાવીશમી પ્રતિજ્ઞા શીખવતાં સુધી સમજાવવાની જરૂર નથી.

૫. કૃત્ય પ્રતિજ્ઞા સ્વીકૃતપક્ષ જોડે અને પ્રમેય પ્રતિજ્ઞા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ જોડે સંબંધી છે.

૬. સ્વીકૃત પક્ષ—જે કૃત્યનું સાધન સ્વીકારેલું છે.

૭. પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ—જે પ્રમેયની સત્યતા સિદ્ધતાવિના કબૂલ રાખેલી છે.

૮. આકૃતિ રચના—પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવાને વાસ્તે તે પ્રતિજ્ઞાનાજ સમુદાહરણમાં જે લીટીઓ ખરેખરી કહેલી છે; તે વિના ખીજી લીટીઓ ધણીવાર દોરવી પડે છે. આવી લીટીઓ દોરવી તેને આકૃતિ રચના કહે છે.

૯. અનુમાન—જે પ્રતિજ્ઞા ઉપરથી સહેજ નીકળે છે તે.

૧૦. ટિકા—પ્રતિજ્ઞા ઉપરની ચર્ચા, તે અનુમાન કહેવાય નહિ.

૧૧. પૂર્વ સિદ્ધાંત—જે પ્રતિજ્ઞા કોઈ વધારે અગત્યની પ્રતિજ્ઞા સ્થાપન કરવાને વાસ્તે માત્ર લખેલી હોય છે તે. જેમકે, સાતમી પ્રતિજ્ઞા ફક્ત આઠમી પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવા સારૂ લખેલી છે.

૧૨. ઉપન્યાસ—ધારેલી વાત. એટલે, પ્રતિજ્ઞાના સમુદાહરણમાં જે ભાગમાં કાંઈ વસ્તુ સાચી આપેલી છે એમ ધારેલું છે. અને જે ઉપરથી કહેલી અનુભિતિ કાઢવાની છે.

પ્રતિજ્ઞા લખવાની રીતિ.

પ્રથમ પ્રતિજ્ઞાનો નંબર અને જાત, પછી મથાળું; કૃત્ય હોય તો સાધન અને પછી સિદ્ધતાનો વિષય આવે. ખિંદુ એક અક્ષરથી, લીટી બે અક્ષરથી અને ખૂણો ત્રણ અક્ષરથી અગર એક અક્ષરથી ખતાવાય છે. ખૂણાને વાસ્તે ત્રણ અક્ષર લીધા હોય ત્યારે, મથાળાનો અક્ષર વચ્ચે આવવો જોઈએ. ત્રિકોણ ત્રણ અક્ષરથી, ચોખૂણુ સામસામેના—કર્ણના છેડાના—બે અક્ષરથી અને બહુખૂણુ ધણા અક્ષરોથી ખતાવાય છે. તેમજ ગોળને વાસ્તે પરિધમાં ત્રણ અક્ષર લેવાની રીત છે.

અંગ્રેજી મૂળાક્ષરનો ક્રમ અ, બ, ક, ડ, ઈ, ફ, ગ, હ, ઐ વગેરે છે. માટે, એ અક્ષરો બાળખોદમાં લખીને સંજ્ઞા આપી છે.

પ્રતિજ્ઞા ૧ લી કૃત્ય.

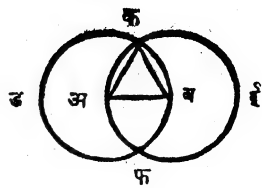
કોઈ આપેલી (અ બ) અંતવાનસીધીલીટી ઉપર એક સમખાળુ ત્રિકોણ કરવાનું.

સાધન

અ મધ્યખિંદુ ધારીને અ બ ત્રિજ્યાએ (૩ સ્વી. પ્ર.) બક ડ ગોળ

દોરો; તેમજ વ મધ્યબિંદુ ધારીને વ અ
ત્રિજ્યાએ બીજી અકર્ષ ગોળ દોરો. આ
ગોળના ક છેદન બિંદુથી આપેલી સીધી
લીટીના અ તથા વ છેડા સુધી (૧ સ્વી. પ્ર.)

સીધી લીટીઓ દોરો. ત્યારે જે સમબાજુ ત્રિકોણ કરવો હતો તે અ ક વ
ત્રિકોણ થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, અ ક તથા અ વ લીટીઓ એકજ વ ક ડ ગોળની ત્રિજ્યાઓ
છે માટે તેઓ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને વ ક તથા વ અ એકજ
અ ક ઈ ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે માટે, તેઓ પણ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે.
એટલે, વ ક તથા અ ક લીટીઓ એકજ અ વ લીટીની બરાબર થઈ તેથી,
(૧ પ્રત્ય. પ્ર.) તેઓ ત્રણે અરસ્પરસ બરાબર છે. એટલે, અ વ ક ત્રિકોણની
ત્રણે બાજુઓ બરાબર છે. માટે, (૨૪ વ્યા. પ્ર.) તે સમબાજુ ત્રિકોણ
છે એ સિદ્ધ.

૧. અંતવાન સીધી લીટી ઉપરજ સમબાજુ ત્રિકોણ થાય. અમિત
કે અનંત લીટી ઉપર થાય નહિ કેમકે તેનું માપ નથી.

૨. પ્રત્યેક ગોળ બીજા ગોળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જાયછે; તેથી તેના
પરિધનો એક ભાગ બીજા ગોળની માંહે અને બીજો ભાગ બીજા ગોળની
બહાર પડવો જોઈએ. તેથી બંને ગોળો છેદાવાજ જોઈએ.

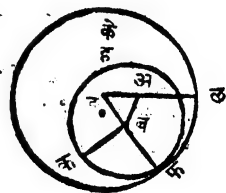
૩. આપેલી લીટીની બંને તરફ સમબાજુ ત્રિકોણ કરી શકાય.

પ્રતિજ્ઞા ૨ જ કૃત્ય.

કોઈ આપેલા (અ) બિંદુથી, એક આપેલી (વ ક) અંતવાનસીધી-
લીટીની બરાબર એક સીધી લીટી દોરવાનું.

સાધન.

આપેલા (અ) બિંદુથી આપેલી અંતવાન સીધી લીટી (વ ક) ના એક
વ છેડા સુધી (૧ સ્વી. પ્ર.) એક સીધી લીટી દોરો.
અને અ વ લીટી ઉપર એક અ ડ વ સમબાજુ
ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. વ મધ્ય બિંદુથી વ ક
ત્રિજ્યાએ એક ક હ ફ ગોળ (૩ સ્વી. પ્ર.) દોરો.
આ ગોળના પરિધને ફ આગળ મળે ત્યાં સુધી



કેવે ને (૨ સ્ત્રી. પ્ર.) વધારો. અને ડં મધ્ય બિંદુથી ડફ ત્રિજ્યાએ બીજું ફલકે ગોળ (૩ સ્ત્રી. પ્ર.) દોરો. આ ગોળના પરિધને લ આગળ મળે ત્યાં સુધી ડઅ લીટીને (૨ સ્ત્રી. પ્ર.) વધારો. એટલે દોરવાની લીટી અલ લીટી થશે.

સિદ્ધતા.

કેમકે, ડલ તથા ડફ લીટીઓ એકજ ફલકે ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી (૧૫ વ્યા. પ્ર.) તેઓ બરાબર છે. વળી ડઅ તથા ડવ લીટીઓ વડઅ સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓ છે. તેથી (૨૪ વ્યા. પ્ર.) તેઓ પણ બરાબર છે. પહેલી કહેલી બે ડલ તથા ડફ બરાબર લીટીઓમાંથી આ ડઅ તથા ડવ બરાબર લીટીઓ બાદ કરીએ તો, બાકી અલ તથા વફ (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. પણ વફ તથા વક્ર એકજ ક્રુત્ત ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી, તેઓ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, અલ તથા વક્ર બંને પ્રથક પ્રથક વફ ની બરાબર છે તેથી, (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) તેઓ અસ્પર્શ બરાબર છે. માટે, વક્ર ની બરાબર અલ લીટી છે અને તે કહેલા અ બિંદુથી દોરેલ છે.

૧ આપેલા બિંદુને આપેલી સીધી લીટીના એક છેડા સાથે સાંધવું. તે છેડાને સંધાએલો છેડો અને સાંધનારી લીટીને સાંધનારી લીટી કહેવી.

૨ સાંધનારી લીટીની ક્ષાપણુ એક બાજુએ સમબાજુ ત્રિકોણ કરવો.

૩ પહેલા (નાના) ગોળનું મધ્યબિંદુ સંધાએલો છેડો થાય અને આપેલી લીટી તે ગોળની ત્રિજ્યા થવી જોઈએ.

૪ આપેલા બિંદુની સામેની બાજુએ સમબાજુ ત્રિકોણની જે બાજુ હોય, તે બાજુને આપેલી લીટીના સંધાએલા છેડાની પાર નાના ગોળના પરિધને મળતાં સુધી વધારવી જોઈએ.

૫ સાંધનારી લીટીની સામે ત્રિકોણનું જે શિરોબિંદુ છે તે મોટા ગોળનું મધ્યબિંદુ લેવું જોઈએ અને ત્યાંથી તે, નાના ગોળના પરિધને અડતાં સુધી થયેલી લીટીને મોટા ગોળની ત્રિજ્યા લેવી જોઈએ.

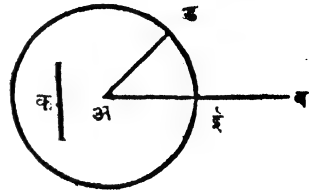
૬ સમબાજુત્રિકોણની બાકીની બાજુને કહેલા બિંદુની પાર મોટા ગોળના પરિધને મળતાં સુધી વધારી તો, તે વધારો દોરવાની લીટી થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૩ જ કૃત્ય.

કોઈ આપેલી (અથ તથા ક) બે સીધી લીટીઓમાંની મોટી (અથ) માંથી નાની (ક) ની બરાબર એક ભાગ કાપવાનું.

સાધન.

મોટીના કોષ/પણુ અ છોડાથી નાની ક ની બરાબર (૨ પ્રતિ. પ્ર.) અઢ સીધી લીટી દોરો. અને અ બિંદુને મધ્ય બિંદુ ધારીને અઢ ત્રિજ્યાએ (૩ સ્ત્રી. પ્ર.) એક ગોળ દોરો. ત્યારે આ ગોળથી કપાએલ મોટીનો ભાગ અઈ નાની ક ની બરાબર છે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, અઈ તથા અઢ એકજ ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી તેઓ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને ક તથા અઢ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે તેથી અઈ તથા ક (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે.

૧ આપેલી બંને લીટીઓ અંતવાન બેધએ.

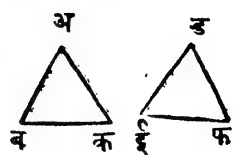
૨ નાની લીટીને વધારીને મોટી જેવડી કરવી હોય તો, મોટીને ત્રિજ્યા ધારી. ગોળ દોરવો. પછી ગોળના પરિધ સુધી નાનીને વધારવી.

પ્રતિજ્ઞા ૪ થી પ્રમેય.

જો, (વઅક તથા ઈઢફ) બે ત્રિકોણોમાં એકની (અવ તથા અક) બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની (ઢઈ તથા ઢક) બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને તે બાજુઓના (વઅક તથા ઈઢફ) અંતર ખૂણા પણ બરાબર હોય તો, વક તથા ઈફ પાયા અથવા બાકીની બાજુઓ બરાબર થશે (૧ બા. *); વળી એક ત્રિકોણના પાયા આગળના (વ તથા ક) બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના પાયા આગળના (ઈ તથા ફ) બે ખૂણાઓ જેઓ બરાબર બાજુઓની સામે છે, તેઓની (વ, ઈ ની તથા ક, ફની) બરાબર થશે (૨ બા.); અને તે ત્રિકોણો પણ બરાબર થશે (૩ બા.).

એ બે ત્રિકોણોને એવી રીતે મૂકા કે, બરાબર ખૂણાઓમાંથી એક

૬ ખૂણાનું શિરોબિંદુ બીજા અ ખૂણાના શિરોબિંદુ ઉપર પડે.* અને કહેલા બરાબર ખૂણાઓની આસપાસની બાજુઓ માંહેલી એક ૬૬, બીજા ત્રિકોણમાં તેની બરાબરની અબ બાજુ ઉપર પડે;*



અને અક તથા ૬ફ બરાબર બાજુઓની બાકીની બેડ, બવ તથા ૬૬ જેઓ મળી જાય છે તેઓની એકજ તરફ પડે.*

અ તથા ૬ શિરોબિંદુઓ તથા અવ અને ૬૬ બરાબર બાજુઓ મળી જાય છે. તેથી વ તથા ૬૬ બિંદુઓ પણ મળી જવાં જોઈએ. જો તેઓ ન મળે અને જોયે અગર નીચે પડે તો અવ તથા ૬૬ બાજુઓ બરાબર થાય નહિ; અને તે ઉપન્યાસથી ઊલટું થાય; માટે વ તથા ૬૬ બિંદુઓ મળે છે. વળી, ૬૬ બાજુ અવ ઉપર પડે છે અને અક તથા ૬ફ બાજુઓ અવ ની એકજ તરફ પડે છે. અને વઅક તથા ૬૬ફ ખૂણા બરાબર છે તેથી, ૬ફ બાજુ અક ઉપર પડવી જોઈએ. કેમકે, જો ઉપર ન પડતાં માંહે કે બહાર પડે તો, અ તથા ૬ ખૂણા બરાબર થાય નહિ, એ, ઉપન્યાસથી ઊલટું થાય. માટે, ૬ફ બાજુ અક બાજુ ઉપરજ પડે.

૬ ફ બાજુ અક ઉપર પડે છે, અને તેઓ બરાબર છે તેથી, ફ છેડા ક ઉપર પડવો જોઈએ. વક તથા ૬૬૬ પાયાઓના છેડા મળી જાય છે તેથી એ પાયાઓ પણ મળી જવા જોઈએ. કેમકે, જો તેઓ નહિ મળે તો, જોયે અગર નીચે પડે અને એમ થવાથી તેઓ અવકાશ ધેરે. એ ૧૦ પ્રસક્ષ પ્રમાણથી ઊલટું થાય. માટે, તે બંને પાયા મળી જાય છે અને તેથી ૮ પ્રસ. પ્ર. પ્રમાણે તે બંને બરાબર છે. (૧ બા. સિદ્ધાંત).

વળી, ૬૬૬ તથા ૬૬૬ બાજુઓ અનુક્રમે વઅ તથા વક જોડે

* પ્રથમ બિંદુ અને બાજુ મૂકવાની છૂટ વગર આધારે લેઈ શકાય છે.

~~શિક્ષક~~ શિક્ષકે કાગળના કડકાના આવાજ બે ત્રિકોણો બનાવી તેમાં આજ બાજુઓ અક્ષરોથી સંગ્રા આપી એક ઉપર એક મૂકી બતાવવા તેથી નિશાળીઆને જલદી સમજ પડશે.

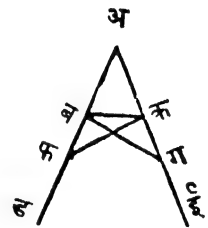
મળી જાય છે. તેથી (૮ પ્રત્ય. પ્ર.) ી તથા વ ખૂણા બરાબર છે; અને તે-
વાજ કારણથી ફ તથા ક ખૂણાઓ બરાબર છે. (૨ બા. સિદ્ધ થઈ).

હવે, એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની ત્રણ
બાજુઓ સાથે મળી જાય છે, તેથી તે ત્રિકોણો પણ મળી જાય છે, માટે,
તેઓ (૮ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ. (૩ બા.).

પ્રતિજ્ઞા ૫ મી પ્રમેય.

એક (વ અ ક) સમઢી બાજુ ત્રિકોણની (અવ તથા અક) બ-
રાબર બાજુઓની સામેના (વ તથા ક) ખૂણા બરાબર છે (૧ બા.);
અને જો બરાબર બાજુઓને ત્રીજી (વ ક) બાજુના (વ તથા ક) છે-
ડાની પાર વધારી તો તેઓના વધારેલા ભાગો અને ત્રીજી બાજુથી થયેલા
(ઢવક તથા ીકવ) ખૂણાઓ પણ બરાબર થશે (૨ બા.).

ત્રીજી બાજુના વ તથા ક છેડાઓની પાર અવ તથા અક એ
બરાબર બાજુઓને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને તે
બાજુઓમાંની એકના વધારેલા ઢઢ ભાગમાં
કોઈ પણ ફ બિંદુ લો. અને બીજી બાજુના વ-
ધારેલા ભાગમાંથી અફ ની બરાબર (૩ પ્રતિ.
પ્ર.) અગ કાપો; વધારેલી બાજુઓ ઉપર એવાં
લીધેલાં ફ તથા ગ બિંદુઓને ત્રિકોણની ત્રીજી
બાજુના વ્યુત્ક્રમ છેડાઓ ફ, ક તથા વ, ગ (૧
સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



ફઅક તથા ગઅવ ત્રિકોણમાં અફ બાજુની બરાબર અગ
(આકૃ. ૨૫. પ્ર.) રાખેલી છે; અને અક તથા અવ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બ-
રાબર છે; અને અ ખુણો બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે તેથી (૪ પ્રતિ.

આ પ્રતિજ્ઞાની આકૃતિ રચના ગુંચવણ બરેલી છે કેમકે, એક
ત્રિકોણના કેટલાક અવયવો બીજા ત્રિકોણમાં આવે છે; માટે શિક્ષકે કાગળ-
ના કડકાના આવડા બે જૂદા જૂદા ત્રિકોણો બનાવી તે ત્રિકોણો એક ઉપર
એક કૂવી રીતે રહેલા છે તે, તથા તેમાંના સરખા ખૂણા વગેરે અંગો
આકૃતિમાં ક્યાં અને કૂવી રીતે રહેલાં છે તે બતાવવાથી વિદ્યાર્થીને જલદી
સમજ પડશે.

પ્ર.) ફક લીટી ગગ ની, અફક ખૂણો અગવ ખૂણાની અને અફક ખૂણો અગવ ખૂણાની ખરાખર છે.

હવે, અફ તથા અગ ખરાખર લીટીઓમાંથી અવ તથા અક ખરાખર બાજુઓ બાદ કીધી તો, બાકીની વફ તથા કગ (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) ખરાખર રહેશે. તેથી, પાયા નીચેના વફક તથા કગવ ત્રિકોણોમાંની વફ તથા ફક બાજુઓ અનુક્રમે કગ તથા ગવ ની ખરાખર છે; અને તે બાજુઓના અંતર ખૂણા ફ તથા ગ પણ (ઉપર સિદ્ધ કર્યા પ્ર.) ખરાખર છે માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) તે ત્રિકોણોમાંની વફ બાજુ સામેના ફકવ ખૂણો તે, તેની ખરાખરની કગ બાજુ સામેના ગવક ખૂણાની ખરાખર છે; (આ ખરાખર ખૂણાઓને અફક તથા અગવ ઉપર કીધેલા ખરાખર ખૂણાઓમાંથી બાદ કરીએ તો બાકી અવક તથા અકવ ખૂણાઓ ૩ પ્રત્ય. પ્ર. ખરાખર રહેશે. ૧ બા. સિદ્ધ થઈ.) અને ફક બાજુ સામેના વફક ખૂણો તે ગવ બાજુ સામેના ગકવ ખૂણાની ખરાખર છે એ (૨ બા.) સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૬ હી પ્રમેય,

જો, (વ અ ક) એક ત્રિકોણના (વ તથા ક) એ ખૂણાઓ ખરાખર હોય તો, તેઓની સામેની (અ ક તથા અ વ) બાજુઓ પણ ખરાખર થશે.*

કેમકે, જો બાજુઓ ખરાખર નહિ હોય તો, ધારો કે, તેઓ માંહેલી એક અવ બીજી અક કરતાં મોટી છે. માટે, મોટીમાંથી નાની અક ની ખરાખર વડ (૩ પ્રતિ પ્ર.) કાપો. અને કડ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



ત્યારે, વડક તથા અકવ ત્રિકોણોમાં વડ બાજુ વ અક ની ખરાખર રાખેલી છે. અને વક બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. તેથી, વડ તથા વક બાજુઓ અનુક્રમે અક તથા કવ બાજુઓની ખરાખર છે. અને વડક તથા અકવ ખૂણા (ઉપન્યાસ પ્ર.) ખરાખર

* જે પ્રતિજ્ઞાઓ પૈકી એકમાં આપેલી બાબત બીજીમાં સિદ્ધ કરવી પડે, અને એકમાં સિદ્ધ કરવાની બાબત બીજીમાં આપેલી હોય ત્યારે તેઓ એક બીજીનો બિલટ પક્ષ કહેવાય. આ પ્રતિજ્ઞા પાંચમી પ્રતિજ્ઞાનો બિલટ પક્ષ છે.

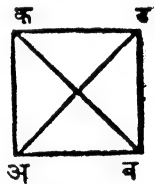
છે. માટે, ઢબક તથા અકબ ત્રિકોણો પણ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, આખાની સાથે તેનો એક ભાગ બરાબર એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે અક બાબુ કરતાં અક બાબુ મોટી નથી તેમ નાની નથી તે પણ તેવીજ રીતે સાબિત કરી શકીએ, માટે તે બંને અરસપરસ બરાબર છે. એ સિદ્ધ.*

- ૧ કાપવાનો ભાગ શિરોબિંદુથી ન લેતાં નીચલા બિંદુથીજ લેવો જોઈએ.
- ૨ મોટી બાબુમાંથી નાની બાબુની બરાબર ભાગ કાપીને જેમ ઉપર પ્રમાણે પ્રતિષ્ઠા સિદ્ધ કરીએ તેમ નાની બાબુને મોટી બાબુના જોડણી વધારીને પણ આ પ્રતિષ્ઠા સિદ્ધ થઈ શકે. બંનેમાં સરખી સિદ્ધતા લાગુ થશે.

પ્રતિષ્ઠા ૭ મી પ્રમેય.

એકજ (અક) સીધી લીટી ઉપર અને તેની એકજ બાબુ તરફ જેની સીમાવાસી બાબુઓ (અક તથા અક અને અક તથા અક) બરાબર થાય, એવા (અકબ તથા અકબ) બે ત્રિકોણો કરી શકાતા નથી. જો, થઈ શકે તો, તે ત્રિકોણો કરો. અને ધારો કે, (૧) પ્રત્યેક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ બીજા ત્રિકોણની બહાર પડે છે.

ક તથા ક બિંદુઓને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. ક-અક ત્રિકોણની અક તથા અક બાબુઓ (ઉપન્યાસપ્ર.) બરાબર છે. તેથી, (૨૫ વ્યા. પ્ર.) તે સમઘી બાબુ ત્રિકોણ છે. માટે, તેના અકક તથા અકક બાબુઓ



(૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ અકક બાબુ તેના ભાગ અકક બાબુ કરતાં (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. તેથી અકક ની બરાબરનો અકક બાબુ પણ અકક બાબુ કરતાં મોટો છે. અને આખો અકક બાબુ

* કાંઈ ખરા તત્વને ખોટું ધાર્યાથી કાંઈ સ્પષ્ટ અસંભવિત કૃત્રી નીકળે ને તેથી મૂળના તત્વને ખરું માનવું પડે એવી સિદ્ધતાને ઊલટી સિદ્ધતા કહે છે. સૂલટી સિદ્ધતાથી ઊલટી સિદ્ધતા ઊતરતી ગણાય છે. આ પ્રતિષ્ઠા પણ ઊલટી સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરેલી છે.

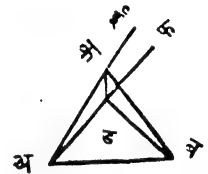
૧ જે બાબુઓ એકજ બિંદુમાંથી નીકળે છે અને સીમા કરનારી છે તે બાબુઓ.

અડક ખૂણા કરતાં (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટા છે. માટે, વડક ખૂણા વકડ ખૂણા કરતાં તો ઘણો જ મોટો છે. હવે, કવડ ત્રિકોણમાં વેક તથા વડ બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, વડક તથા વકડ ખૂણા (૫ પ્રતિ પ્ર.) બરાબર છે. પણ, વડક ખૂણા વકડ ખૂણા કરતાં ઘણો જ મોટો છે એમ ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે, એ અસંભવિત છે. માટે, એક જ સીધી લીટી ઉપર કીધેલા બે ત્રિકોણો માંહેલા પ્રત્યેકનું શિરોબિંદુ બીજાની બીજા ત્રિકોણની બહાર પડે છે, સારે તેઓની સીમાવાસી બાજુઓ બરાબર થઈ શકતી નથી.

૨ જો પ્રકાર. ધારો કે, એક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ ડ બીજા ત્રિકોણની માંહે પડે છે; સારે, અક તથા અડ બાજુઓ (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારે અને કડ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.

કઅડ ત્રિકોણની અક તથા અડ બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર

છે. તેથી તે ત્રિકોણના પાયાની બહારના ઈકડ તથા ફડક ખૂણા (૫ પ્રતિ પ્ર.) બરાબર છે. પણ ઈકડ ખૂણા તેના ભાગ વકડ ખૂણા કરતાં (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. માટે, ઈકડ ખૂણાની બરાબરનો ફડક ખૂણો પણ વકડ ખૂણા કરતાં મોટો છે. અને ફડક ખૂણા કરતાં વડક ખૂણો



(૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. માટે વડક ખૂણો વકડ ખૂણા કરતાં તો ઘણો જ મોટો છે. હવે કવડ ત્રિકોણમાં વેક તથા વડ બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, વડક તથા વકડ ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે; પણ વડક ખૂણો વકડ ખૂણા કરતાં ઘણો જ મોટો છે એવું ઉપર સિદ્ધ કીધું છે. એ અસંભવિત છે; માટે એક જ સીધી લીટી ઉપર કીધેલા ત્રિકોણો માંહેલા એકનું શિરોબિંદુ બીજાની માંહે હોય તો તેઓની સીમાવાસી બાજુઓ બરાબર થઈ શકતી નથી.

૩ જો પ્રકાર. ધારો કે, એક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ ડ બીજા ત્રિકોણની અક બાજુ ઉપર પડે છે સારે એ સ્પષ્ટ છે કે, અક તથા અડ બાજુઓ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર નથી.

માટે, કોઈ પણ પ્રકારમાં બીજાની સીમાવાસી બાજુઓ બરાબર છે એવા બે ત્રિકોણો કહેલી લીટીની એક જ બાજુએ કરી શકાશે નહિ.



પ્રતિજ્ઞા ૮ મી પ્રમેય.

જો, (અવ કં તથા ફકડ) જે ત્રિકોણોમાં એકની (અવ તથા વક) જે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની (ફક તથા કડ) જે બાજુઓની બરાબર હોય, અને (અક) પાંચો પણુ (ફકડ) પાયાની બરાબર હોય તો; બરાબર બાજુઓથી થયેલા વ તથા ફ અંતરખૂણા બરાબર થશે.

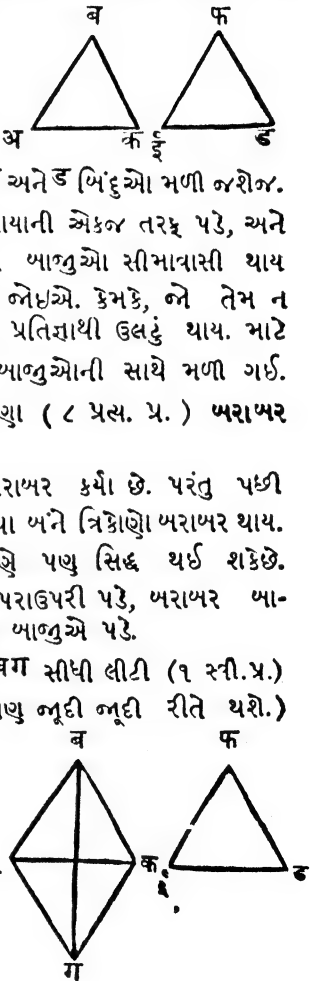
ક્રમકે, અવક ત્રિકોણ ઉપર ફકડ ત્રિકોણને એવી રીતે મૂકા કે, અ બિંદુ ઉપર ફ બિંદુ પડે, અને અક પાયા ઉ-
પર ફકડ પાંચો પડે, તેથી ક અને ડ બિંદુઓ મળી જશે. જો એ બે બિંદુઓમાંથી એક બિંદુ બીજાની બહાર કે માંહે પડે તો, પાયા બરાબર અ નહિ થાય અને એ ઉપન્યાસથી ઉલટું થશે માટે ક અને ડ બિંદુઓ મળી જશેજ.

હવે, બંને ત્રિકોણોમાં શિરો બિંદુઓ પાયાની એકજ તરફ પડે, અને અવ તથા ફક અને વક તથા કડ બરાબર બાજુઓ સીમાવાસી થાય તો ફ શિરોબિંદુ વ શિરોબિંદુ ઉપરજ પડવું જોઈએ. ક્રમકે, જો તેમ ન પડે તો, તે બંને જૂદાં જૂદાં પડે; એ, ૭ મી પ્રતિજ્ઞાથી ઉલટું થાય. માટે અવ તથા વક બાજુઓ ફક તથા કડ બાજુઓની સાથે મળી ગઈ. તેથી, તેની વચ્ચેના અવક તથા ફકડ ખૂણા (૮ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧ આ પ્રતિજ્ઞામાં માત્ર અંતરખૂણા બરાબર કર્યા છે. પરંતુ પછી એથી પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી બાકીના ખૂણાઓ તથા બંને ત્રિકોણો બરાબર થાય. (બીજી રીતે) આ પ્રતિજ્ઞા નીચે પ્રમાણે પણ સિદ્ધ થઈ શકે છે. ત્રિકોણના પાયા (અક અને ફક) ઉપરાઉપરી પડે, બરાબર બાજુઓ સીમાવાસી થાય, અને ત્રિકોણો વિરુદ્ધ બાજુએ પડે.

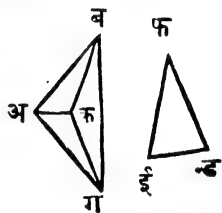
આરે, વગ શિરોબિંદુઓને સાંધે એવી વગ સીધી લીટી (૧ સ્વી. પ્ર.) દોરો. (તેથી આકૃતિ રચના નીચે પ્રમાણે ત્રણ જૂદી જૂદી રીતે થશે.) ૧ હું ધારો કે, વગ લીટી પાયાને છેદે છે.

હવે, ફકડ ત્રિકોણ તે અગક ત્રિકોણ થયો. તેથી, ફ શિરોબિંદુ ગ આગળ, ફક બાજુ તે અગ સ્થળે અને કડ તે કગ અ સ્થળે પડે છે. વઅ તથા ફક (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, વઅ તથા અગ

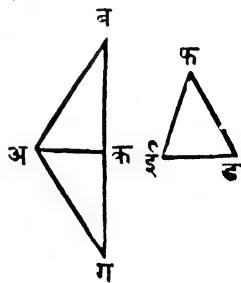


બરાબર છે. તેથી ગઅવ ત્રિકોણ (૨૫ વ્યા. પ્ર.) સમઘીબાજુ ત્રિકોણ થયો. માટે, તેના અવગ તથા વગઅ ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ વક તથા ફડ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. અને ફડ ની બરાબર ગક છે માટે, ગકવ ત્રિકોણમાં વક તથા ગક બાજુઓ બરાબર થઈ. તેથી (૨૫ વ્યા. પ્ર.) તે સમઘીબાજુ ત્રિકોણ થયો. માટે, તેના ગવક તથા કગવ ખૂણાઓ પણ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. આ બરાબર ખૂણાઓ પહેલા બરાબર કરેલા ખૂણાઓ સાથે મેળવ્યા તો, આખા અવક તથા અગક ખૂણાઓ (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થશે. અને અગક ખૂણો તે, ફફડ ખૂણાની બરાબર છે તેથી અવક તથા ફફડ ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૨ જું ધારો કે, વગ લીટી મળી ગયેલા પાયાની બહાર પડે છે. ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે ગઅવ સમઘી બાજુ ત્રિકોણ છે. તેથી, ગવઅ તથા વગઅ ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને માંહે નો ગકવ ત્રિકોણ પણ સમઘી બાજુ ત્રિકોણ છે. તેથી, ગવક તથા કગવ ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. આ બંને બરાબર ખૂણાઓ પહેલા બરાબર કરેલા ખૂણાઓમાંથી બાદ કરો તો, બાકી અવક તથા અગક ખૂણાઓ, (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. અને અગક ખૂણો એ ફફડ ખૂણાની બરાબર છે તેથી અવક તથા ફફડ ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.



૩ જું ધારો કે, વગ લીટી પાયાના કોઈપણ એક છેડાની પાર જાય છે. વક તથા કગ લીટીઓ (૧૦ પ્રત્ય. પ્ર.) વગ સાથે મળી જવી જોઈએ. અને ગઅવ સમઘી બાજુ ત્રિકોણ છે તેથી પાયા આગળના વ તથા ગ ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર થશે. અને ગ ખૂણો તે ફ ખૂણાની બરાબર છે તેથી વ તથા ફ ખૂણા (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા એ સિદ્ધ.

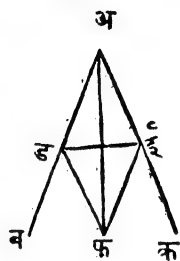


પ્રતિજ્ઞા ૯ મી કૃત્ય.

કાઈ આપેલા (વચક) સીધી લીટી ખૂણાને દુભાગવાનું.

સાધન.

અવ બાજુમાં કાઈ પણ ઢ બિંદુ લો. અને અક માંથી અડ ની બરાબર (૩ પ્રતિ. પ્ર.) અઈ કાપો. ઢઈ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અને તે ઉપર અ ની સામેની તરફ ઢફ ઈ સમબાજુ ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો અને અ તથા ફ બિંદુઓને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. એટલે, અ ફ સાંધનારી લીટી કહેલા વચક ખૂણાને દુભાગેછે.



સિદ્ધતા.

ફઅડ તથા ફઅ ઈ ત્રિકોણોમાં અડ તથા અ ઈ બાજુઓ (આકૃ. ૨૪. પ્ર.) બરાબર છે; અફ બાજુ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને ફડ તથા ફઈ (ડફઈ સમબાજુ ત્રિકોણોની બાજુઓ છે માટે ૨૪ વ્યા. પ્ર.) પણ બરાબર છે. માટે, ફઅડ તથા ફ અઈ ખૂણાઓ (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી અફ સીધી લીટી કહેલા વચક ખૂણાને દુભાગે છે એ સિદ્ધ.

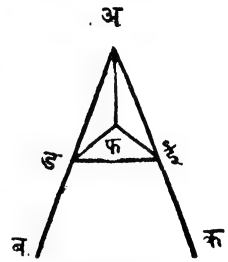
૧ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં એ અગત્યનું છે કે, સાંધનારી ઢઈ લીટીની જેણી તરફ કહેલો ખૂણો હોય તેની ઉલટી તરફ સમબાજુ ત્રિકોણ કરવો. નહિતો, સમબાજુ ત્રિકોણનું ફ શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના અ શિરોબિંદુ સાથે કદાચ મળી જાયતો, અ ફ સાંધનારી લીટી થશે નહિ અને તેથી સાધન પણ થશે નહિ.

૨ તો પણ જે પ્રકારોમાં સમબાજુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના શિરોબિંદુ સાથે મળી જતું નથી, તે પ્રકારોમાં ઢઈ સાંધનારી લીટીની જે તરફ કહેલો ખૂણો છે, તેણી તરફ સમબાજુ ત્રિકોણ કાઢાથી આ કૃત્યનું સાધન થઈ શકેછે. જે બે સ્થિતિઓમાં શિરોબિંદુ આવે, તે બે સ્થિતિઓને વાસ્તે નીચે પ્રમાણે સિદ્ધતાની જરૂર છે.

• આ પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી બેનો ધાત કરવાથી જે સંખ્યા આવે તે સંખ્યા જેટલા એક સીધી લીટી ખૂણાના સમાન ભાગો થઈ શકે.

૧ હું ધારો કે, સમબાળુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના શિરોબિંદુની માંહે પડે છે.

ઉપર જે સિદ્ધતા આપી છે તેમાં કાંઈપણ ફેરફાર કર્યા વિના અહીં બરાબર લાગુ થશે.



૨ હું ધારો કે, સમબાળુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના શિરોબિંદુની બહાર પડે છે.

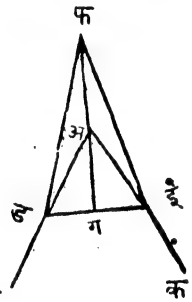
આ પ્રકારમાં ફઅ લીટીને વધારીશું તો તે, કહેલા ખૂણાને દુભાગશે. કેમકે, ઢફઅ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ

અનુક્રમે ફફઅ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની

(ઢફ તથા ફફ સમબાળુ ત્રિકોણની બાજુઓ છે માટે, ૨૪ વ્યા. પ્ર. અને અડ તથા

અફ આમૃતિ ૨૫. પ્ર. અને ફઅ બંનેમાં સાધારણ છે માટે) બરાબર છે. તેથી ઢફઅ

તથા ફફઅ ખૂણા (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. વ



બળી, ઢફગ તથા ફફગ ત્રિકોણોમાં પણ ઢફ તથા ફફ બાજુઓ બરાબર છે, ગફ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને ઢફગ તથા ફફગ ખૂણા બરાબર છે. માટે, ઢગ તથા ફગ પાયાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને

ઢગઅ તથા ફગઅ ખૂણાઓ પણ બરાબર છે.

હવે, ઢગઅ તથા ફગઅ ત્રિકોણોમાં ઢગ તથા ફગ બાજુઓ બરાબર છે. અગ બંનેમાં સાધારણ છે. અને ગ આગળના બંને તરફના ખૂણા બરાબર છે માટે ઢઅગ તથા ફઅગ ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.

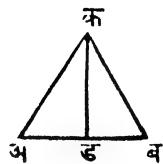
પ્રતિજ્ઞા ૧૦ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (અથ) અંતવાન સીધી લીટીને દુભાગવાનું.

૧ અમિત કે અનંત સીધી લીટી દુભાગી શકાય નહિ કારણ કે, તેના માપની હદ નથી.

સાધન.

આપેલી અથવા સીધી લીટી ઉપર એક અથવા સમખાંડ ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને અથવા ખૂણાને (૯ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો. અને દુભાગનારી લીટીને કહેલી લીટીમાં (ક આગળ) મળતાં સુધી (૨૨વી. પ્ર.) વધારો. આ (કક) લીટી કહેલી અથવા લીટીને ક બિંદુ આગળ દુભાગે છે.



સિદ્ધતા.

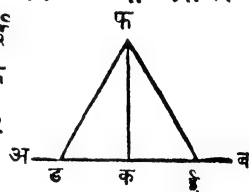
અકક તથા વકક ત્રિકોણોમાં અક તથા વક બાજુઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. અને કક બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને અકક તથા વકક ખૂણા પણ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. માટે, અક તથા વક પાયા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, અથવા સીધી લીટી ક બિંદુ આગળ દુભાગાયેલી છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૧૧ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (અથવા) સીધી લીટીમાં એક આપેલા (ક) બિંદુથી આપેલી લીટી ઉપર લંબ દોરવાનું.

સાધન.

આપેલી અથવા લીટીમાં કોઈ પણ ક બિંદુ લો અને કક ની બરાબર કઈ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો; કઈ ઉપર એક કકઈ સમખાંડ ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને કક (૧ ૨વી. પ્ર.) દોરો. એટલે, તે લીટી કહેલી લીટી ઉપર લંબ છે એવું સિદ્ધ થશે.



સિદ્ધતા.

કમક, કકક તથા કઈક ત્રિકોણોમાં કક ને કઈ બાજુઓ કકઈ સમખાંડ ત્રિકોણની બાજુઓ છે માટે, (૨૪ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને કક તથા કઈ બાજુઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. અને કક બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. માટે, કક તથા કઈ બરાબર બાજુઓની સામેના કકક તથા કઈક ખૂણા (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, આપેલી અથવા સીધી લીટી ઉપર ક બિંદુ આગળ કક (૧૦ વ્યા. પ્ર.) લંબ છે એ સિદ્ધ.

૧. આપેલી સીધી લીટીમાં અંતવાન તથા અમિત (અનંતવાન) સીધી લીટી એ બંનેનો સમાવેશ થાય છે.

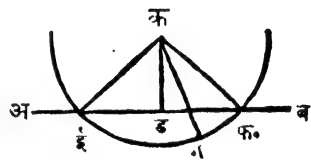
૨. આપેલી લીટી કદાપિ અંતવાન હોય અને તેની અંદરનું બિંદુ એક છેડા ઉપરજ આપ્યું હોય તો, તે છેડા તરફ તે લીટીને ૨ જા સ્વી. પ્રમાણે બધારીને આ કૃત્યનું સાધન થઈ શકે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૨ મી કૃત્ય.

કોઈ આપેલી અનિયમિત સીધી લીટી અંત ની બહાર એક (ક, બિંદુ આપેલું છે, ત્યાંથી આપેલી લીટી ઉપર એક લંબ ઊતારવાનું.

સાધન.

આપેલી લીટીની બીજી બાજુ તરફ કોઈ પણ ગ બિંદુ લો અને કગ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો અને ક મધ્યબિંદુ ધારીને કગ ત્રિજ્યાએ આપેલી લીટીને ઈ તથા ફ બિંદુઓમાં કાપે એવું એક ગોળ (૩ સ્વી. પ્ર.) દોરો. અને કઈ તથા કફ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો, હવે, ગોળના પરિધયી કપાએલી ઈફ લીટીને ઢ આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો અને કહેલા ક બિંદુથી દુભાગ બિંદુ સુધી કઢ સીધી લીટી (૧ સ્વી. પ્ર.) દોરો. એટલે આ કઢ લીટી દોરવાનો લંબ થશે.



સિદ્ધતા.

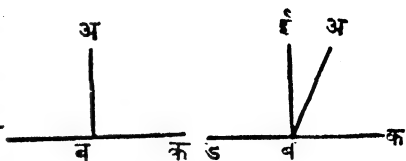
કમકે, ઈડક તથા ફડક ત્રિકોણોની ઈક તથા ફક બાજુઓ ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે માટે (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને ઈડ તથા ફક બરાબર રાખેલી છે. અને કઢ બંનેમાં સાધારણ છે. તેથી ઈડક તથા ફક બાજુ (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. માટે અંત લીટી ઉપર કઢ (૧૦ વ્યા. પ્ર.) લંબ છે એ સિદ્ધ.

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં એ અગત્યનું છે કે, આપેલી સીધી લીટી લંબાઈમાં અનિયમિત નોંધએ.

પ્રતિજ્ઞા ૧૩ મી પ્રમેય.

જ્યારે એક (ક) સીધી લીટી ઉપર બીજી (અ) સીધી લીટી પડીને તેની સાથે ખૂણા કરે છે, ત્યારે તેઓ બે કાટખૂણા છે. અથવા તેઓનો

સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે.
(પહેલી આકૃતિ) ને અવ સીધી
લીટી ઢક લીટી ઉપર લંબ હોય
તો, અવક તથા અવઢ ખૂણા ઢ



(૧૦ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણા છેજ. (પહેલી આકૃતિ) (ખીજી આકૃતિ)
પણ ને અવ લંબ ન હોયતો, (ખીજી આકૃતિ જુઓ) ઢક ઉપર વ બિંદુથી
(૧૧ પ્રતિ. પ્ર.) વર્ડે લંબ દોરો. અને તેથી ઢવર્ડે તથા કવર્ડે ખૂણા (૧૦
વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણા થયા. પણ કવર્ડે ખૂણો કવઅ તથા અવર્ડે ખૂણા મ-
ળીને થયેલો છે. હવે, આખા કવર્ડે ખૂણામાં ઈવઢ ખૂણો મેળવો. તેમ કવર્ડે
ખૂણાના ભાગ કવઅ તથા અવર્ડે ખૂણાઓમાં પણ ઈવઢ ખૂણો મેળવો
એટલે, કવર્ડે તથા ઈવઢ નો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) કવઅ તથા અવર્ડે
તથા ઈવઢ એ ત્રણ ખૂણાના સર્વાળા બરાબર થશે.

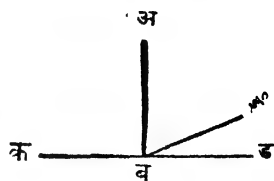
વળી, ઢવઅ ખૂણો ઢવર્ડે તથા ઈવઅ ખૂણા મળીને થયેલો છે. એ-
ઓમાં અવક ખૂણો મેળવો એટલે, ઢવઅ તથા અવક ખૂણાઓનો સર્વાળો
ઢવર્ડે તથા ઈવઅ અને અવક એ ત્રણ ખૂણાના સર્વાળા બરાબર થયો;
પણ, કવર્ડે તથા ઈવઢ ખૂણાઓનો સર્વાળો આજ ત્રણ ખૂણાના સર્વાળાની
બરાબર આપણે ઉપર કરી ગયા છીએ, તેથી, ઢવઅ તથા અવક ખૂણા-
ઓનો સર્વાળો કવર્ડે તથા ઈવઢ ખૂણાના સર્વાળા બરાબર છે. અને કવર્ડે
તથા ઈવઢ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી, ઢવઅ
તથા અવક ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરા-
બર છે એ સિદ્ધ.

(ખીજી રીતે) અથવા આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં આઠમા પ્રત્યક્ષ-
પ્રમાણનો ઉપયોગ કરવાથી સ્પષ્ટ જણાશે કે, કવઅ તથા અવઢ ખૂણા-
ઓનો સર્વાળો કવર્ડે તથા ઈવઢ ખૂણાના સર્વાળા બરાબર છે. અને કવર્ડે તથા
ઈવઢ ખૂણાનો સર્વાળો (૧૦ વ્યા. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે એટલે કવઅ
તથા અવઢ ખૂણાનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૪ મી પ્રમેય.

ને, (વક તથા વઢ) બે સીધી લીટીઓ એક ખીજી (અવ) સીધી લીટીને એકજ (વ) બિંદુ આગળ અને વિરુદ્ધ બાજુઓ તરફ મળીને ને ખૂણાઓ કરે, તેઓનો સર્વાળો ને બે કાટખૂણા બરાબર હોય તો, તે વક તથા વઢ સીધી લીટીઓથી એક(કઢ) અખંડ સીધી લીટી થશે.

કેમકે, એમ ધારો કે, વક્ર સીધી લીટીનો વડ વધારો નથી. પણ
 વડ છે. ત્યારે, કવઅ તથા અવઈ પૂણાઓનો
 સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટપૂણા બરાબર
 છે; પણ ઉપન્યાસ પ્ર. કવઅ તથા અવડ
 પૂણાનો સર્વાળો બે કાટપૂણા બરાબર છે: માટે, કવઅ તથા અવડ પૂણાઓનો સર્વાળો



(૧ પ્રત્ય. પ્ર.) કવઅ તથા અવઈ પૂણાના સર્વાળા બરાબર થયો; આ બ-
 રાબર પરિમિતોમાંથી કવઅ પૂણો જે બંનેમાં સામાન્ય છે તે બાદ કરો.
 એટલે, અવઈ તથા અવડ પૂણા બાકી રહેશે તે (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર
 રહેશે. પરંતુ, અવઈ પૂણો અવડ પૂણાનો ભાગ છે તેથી, ભાગ આપ્યાની
 બરાબર થાય એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે; માટે, વડ એ વક્ર નો
 વધારો નથી. અને તેજ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, વડ વિના બીજી
 કાટપૂણ લીટી તેનો વધારો નથી. માટે વક્ર ની સાથે વડ મળ્યાથી એક
 અખંડ સીધી લીટી થાય છે એ સિદ્ધ.*

પ્રતિજ્ઞા ૧૫ મી પ્રમેય.

જો (અવ તથા કવ) બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદે તો, સામ
 સામેના (અઈક તથા વડઈ અને કઈવ તથા અઈવ) પૂણાઓ બરાબર થશે

કઈ સીધી લીટી અવ સીધી લીટી ઉપર પડે છે તેથી, અઈક તથા
 કઈવ પૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટપૂણા બરાબર છે; અને
 વડ સીધી લીટી કવ સીધી લીટી ઉપર પડે છે, તેથી કઈવ તથા વડઈ
 પૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટપૂણા બરાબર છે; તેથી અઈક તથા કઈવ
 પૂણાઓનો સર્વાળો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) કઈવ તથા
 વડઈ પૂણાના સર્વાળા બરાબર છે. આ બંને બરાબર સર્વાળામાંથી કઈવ
 જે બંનેમાં સામાન્ય પૂણો છે તે બાદ કરો એટલે, બાકી અઈક તથા વડઈ

* ઉત્તરી સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરેલ છે.

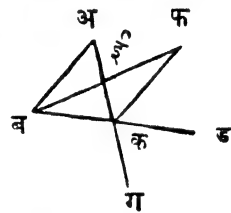
ખૂણા જેઓ સામસામે છે તે (૩ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર રહેશે. અને એજ પ્રમાણે કઈંચ ખૂણો અર્ધ ખૂણાની બરાબર છે એવું સિદ્ધ થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૬ મી પ્રમેય.

જે કોઈ (વચક) ત્રિકોણની એક (વક) બાજુને વધારી તો, બહારનો (અકર) ખૂણો, માંહેના (અકર) ખૂણાની સામેના (વચક અથવા અચક) ખૂણા માંહેલા કોઈપણ એક ખૂણા કરતાં મોટો છે. (પ્રથમ વચક ખૂણા કરતાં અકર ખૂણો મોટો છે એવું સિદ્ધ કરીએ.)

કેમકે, અક બાજુને ર્ આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો. અને બર્ (૧ સ્ત્રી. પ્ર.) દોરો. વળી, વર્ડ ને (૨ સ્ત્રી. પ્ર.) વધારો અને તેમાંથી વર્ડ ના જેવડી ર્ફ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને ફક (૧ સ્ત્રી. પ્ર.) સાંધો.

કર્ફ તથા અર્ડ ત્રિકોણોમાં કર્ડ તથા ર્ફ બાજુઓ અનુક્રમે (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) અર્ડ તથા ર્ડ



બાજુઓની બરાબર છે. અને કર્ડ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) અર્ડ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, ર્ફ તથા વચક ખૂણા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. ર્ફ ખૂણા કરતાં અકર ખૂણો (૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે માટે, ર્ફ ખૂણાની બરાબરના વચક ખૂણા કરતાં પણ અકર ખૂણો મોટો છે.

૧ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં ત્રિકોણની માંહેના જે ખૂણા કરતાં બહારનો ખૂણો મોટો કરવો હોય, તે બંને ખૂણાની સાથે તે ત્રિકોણની જે બાજુ જોડાએલી હોય, તે બાજુને દુભાગવી જોઈએ.

~~આ~~ આકૃતિમાં અક બાજુને વધાર્યાથી થયેલો બહારનો વકગ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) અકર ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, વકગ ખૂણો પણ માંહેના વચક ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

અથવા.

આપેલા (વઅક) ત્રિકોણનો બહારનો (અકક) ખૂણો માંહેના (અવક) ખૂણા કરતાં મોટો છે (એ બા. સિદ્ધ કરીએ).

ઉપર કહેલા નિયમ પ્રમાણે તે બંને

ખૂણા સાથે જોડાએલી વક લીટીને

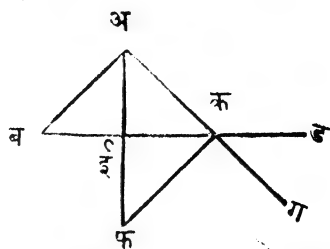
ઈ આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો

અને અઈ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વળી

બઈ ને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને

તેમાંથી અઈ જેવડી ઈફ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને ફક (૧૦ પ્ર.) સાંધો.

અને અક (૨ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



કેમકે, કઈફ તથા બઈવ ત્રિકોણોમાં કઈ તથા ઈફ બાજુઓ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) અનુક્રમે બઈ તથા ઈઅ બાજુઓની બરાબર છે અને કઈફ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) અઈવ ખૂણાની બરાબર છે; માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) ઈકફ તથા અબઈ ખૂણા બરાબર છે; પણ, ઈકફ ખૂણા કરતાં ઈકગ ખૂણો (૯ પ્ર. સ. પ્ર.) મોટો છે; માટે, અબઈ ખૂણા કરતાં ઈકગ ખૂણો પણ મોટો છે. અને ઈકગ તથા અકક ખૂણા (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે, માટે, અબઈ ખૂણા કરતાં અકક ખૂણો મોટો છે અને અબઈ ખૂણો તેજ અવક ખૂણો છે માટે, અવક ખૂણા કરતાં અકક ખૂણો મોટો છે એ સિદ્ધ.

આ સિદ્ધતા ઉપરથી વિધાયિઓ જોશે કે, જે ઉપન્યાસમાં વક ને બદલે અક લીટી વધારવાની કહી હોતતો, તેથી થએલો બહારનો વકગ ખૂણો માંહેના અવક ખૂણા કરતાં મોટો છે એમ પણ સિદ્ધ થયું.

પ્રતિજ્ઞા ૧૭ મી પ્રમેય.

એક (વઅક) ત્રિકોણના કોઈ પણ બે (અ તથા ક અથવા વ તથા ક અથવા અ તથા વ) ખૂણાઓનો સર્વાંગો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે.

કહેલા ખૂણાઓ પૈકી કોઈ (ક) ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કોઈ (વક) બાજુને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો તો, 'અકક'

બહારનો ખૂણો માંહેના અ ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. તે બંનેમાં અકવ

ખૂણો મેળવીએ તો, અકક તથા અકવ

ખૂણાઓનો સર્વાંગો



સર્વાળા કરતાં (૪ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો થશે. અને અકડ તથા અકવ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી, અ તથા અકવ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે.

તેજ પ્રમાણે વ તથા વકઅ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થશે.

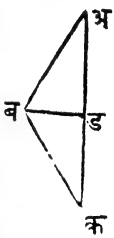
વળી, જો વ બિંદુની પાર વક ને વધારે તો, એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, વ તથા અ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થશે.

૧. એ અગત્યનું છે કે, ત્રિકોણની માંહેના જો બે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે એમ ખતાવવું હોય, તે ખૂણાના હરકોઈ શિરોબિંદુમાંથી બે કાટખૂણા કરનારી ગમે તે બાજુને વધારવી જોઈએ. બાકીના ત્રીજા ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કોઈ બાજુને વધારવી નહિ.

પ્રતિજ્ઞા ૧૮ મી પ્રમેય.

કોઈ પણ (વકઅ) ત્રિકોણમાં જો એક (અક) બાજુ બીજી (અવ) કરતાં મોટી હોયતો; મોટી બાજુની સામેનો (અવક) ખૂણો નાની બાજુની સામેના (વકઅ) ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

મોટી અક બાજુમાંથી નાની અવ બાજુની બરાબર અડ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને વડ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વઅડ ત્રિકોણની અવ તથા અડ બાજુઓ બરાબર છે તેથી (૨૫ વ્યા. પ્ર.) તે સમઘી બાજુ ત્રિકોણ છે. માટે, તેના અવડ તથા અડવ બે ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ, અડવ ખૂણો માંહેના અકવ ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. માટે, અડવ ખૂણાની બરાબરનો અવડ ખૂણો પણ અકવ ખૂણા કરતાં મોટો છે; અને અવડ ખૂણા કરતાં અવક ખૂણો (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. માટે અકવ ખૂણા કરતાં તે અવક ખૂણો ઘણુંજ મોટો છે એ સિદ્ધ.



૧. મોટી બાજુમાંથી નાની બાજુ જેવડી કાપીને ઉપર પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરી છે. તેમ નાની બાજુને મોટી જેવડી વધારીને પણ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકે.

૨. બાજુ કાપવામાં કે વધારવામાં યાદ રાખવું કે, બરાબર બાજુઓ સમાવાસી થાય તોજ સિદ્ધતા થાય.

પ્રતિજ્ઞા ૧૯ મી પ્રમેય.

જો બે બાજુઓ બીજા (ક) ખૂણા

કરતાં મોટો હોય તો, મોટા ખૂણાની સામેની (અક) બાજુ તે, નાના ખૂણાની સામેની (અવ) બાજુ કરતાં મોટી થશે. *

કેમકે, અક બાજુ અવ થી મોટી ન હોય તો, તેની બરાબર અથવા તેનાથી ટૂંકાની હોય.

અક તથા અવ બાજુઓ બરાબર નથી. કેમકે, સારે તો, વ તથા ક ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર થાય. પણ એ, ઉપન્યાસથી બહાર છે. વળી, અક બાજુ અવ બાજુ કરતાં નાની નથી. કેમકે, સારે તો, વ ખૂણા ક ખૂણા કરતાં (૧૮ પ્રતિ. પ્ર.) નાનો થાય. એ પણ ઉપન્યાસથી બહાર છે.

બ્યારે અક બાજુ અવ ની બરાબર અથવા તેનાથી નાની નથી. સારે તો મોટી છે એ સિદ્ધ.*

પ્રતિજ્ઞા ૨૦ મી પ્રમેય.

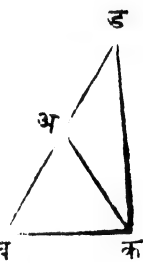
એક (વઅક) ત્રિકોણની કોઈપણ (અવ તથા અક) બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી (વક) બાજુ કરતાં મોટો છે.

વઅ બાજુને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને અક ની બરાબર અડ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને ડક (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.

કઅડ ત્રિકોણની અડ તથા અક બાજુઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી (૨૫ વ્યા. પ્ર.) કઅડ સમદ્વી બાજુ ત્રિકોણ છે. માટે, તેના અડક તથા અકડ ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, અકડ ખૂણા કરતાં વકડ ખૂણા (૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. માટે, તે, અકડ ખૂણાની બરાબરના અડક ખૂણા

કરતાંપણ મોટો છે તેથી, વકડ ત્રિકોણમાં વડ બાજુ વક બાજુ કરતાં (૧૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટી છે. પણ વડ એ અવ તથા અડ ના સરવાળા બરાબર છે. અને અડ ને અક ની બરાબર રાખેલી છે. તેથી, અવ તથા અક ના સરવાળા બરાબર વડ છે; માટે, અવ તથા અક નો સરવાળો વક કરતાં મોટો છે.

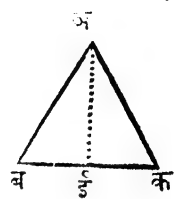
૧. ઉપર પ્રમાણે એક ત્રિકોણની ગમે તે બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં મોટો થશે.



૨. પણ, જે બે બાજુઓનો સર્વાંગો મોટો કરવો હોય, તે બે બાજુ-ઓ જે બિંદુમાં એકઠી મળે તે બિંદુથી બેમાંથી એકને ખીજના નેટલીન વધારવી જોઈએ.

(ખીજ રીતે) વચક ખૂણાને (૯ પ્રતિ. પ્ર.) ફાળાગો. પછી અ તથા ઈ

બિંદુઓ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વર્ડઅ ખૂણો ઈઅક ખૂ-ણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે; અને અ ખૂ-ણાના ઈઅક તથા ઈઅવ ભાગો (આદૃ. રચ. પ્ર.) બરાબર છે, તેથી એવું નીકળે છે કે, ઈ આગળનો પ્રત્યેક ખૂણો અ ખૂણાના ભાગો માંહેલા પ્રત્યેક ખૂણા કરતાં મોટો છે. અને તેથી (૧૯ પ્રતિ. પ્ર.) એવું નીકળે છે કે, વચ બાજુ વર્ડ કરતાં અને અક બાજુ કર્ડ કરતાં મોટી છે. એમાટે, અવ તથા અક બાજુઓનો સર્વાંગો વર્ડ તથા કર્ડ ના સર્વાંગો કરતાં મોટો છે. અને વર્ડ તથા કર્ડ ના સર્વાંગો બરાબર વચ છે. માટે, અવ તથા અક બાજુઓનો સર્વાંગો વચ બાજુ કરતાં મોટો છે એ સિદ્ધ.



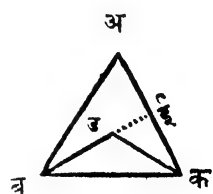
પ્રતિજ્ઞા ૨૧ મી પ્રમેય.

‘કોઈ (વચક) ત્રિકોણની માંહે એક (ક) બિંદુ સુધી કોઈ પણ (વચ) બાજુના છેડાઓથી દોરેલી (વડ તથા કડ) સીધી લીટીઓનો સર્વાંગો ત્રિકોણની બાકીની (અવ તથા અક) બે બાજુઓના સર્વાંગો કરતાં ઓછો છે (૧ બા.); પણ તે લીટીઓની વચ્ચેનો (ક) ખૂણો બાજુઓની વચ્ચેના (અ) ખૂણા કરતાં મોટો છે (૨ બા.).

વડ ને ઈ સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને વચર્ડ ત્રિકોણ લો તો, અવ તથા અઈ બાજુઓનો સર્વાંગો (૨૦ પ્રતિ. પ્ર.)

ત્રીજી વર્ડ બાજુ કરતાં મોટો છે. એ પ્રત્યેકમાં ઈ ક મેળવે એટલે, અવ અને અક (અઈ+ઈક)

બાજુઓનો સર્વાંગો વર્ડ તથા ઈક બાજુઓના સર્વાંગો કરતાં (૪ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો થશે.



વર્ડક ત્રિકોણ લો તો, વર્ડ તથા ઈક બાજુઓનો સર્વાંગો ત્રીજી વચ મેળવે. એટલે,

વર્ડ (વડ+ડર્ડ) તથા ર્ક નો સર્વાળો વડ તથા ડક ના સર્વાળો કરતાં (૪ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો થશે.

અવ તથા અક નો સર્વાળો વર્ડ તથા ર્ક ના સર્વાળો કરતાં મોટો છે; અને વર્ડ તથા ર્ક નો સર્વાળો વડ તથા ડક ના સર્વાળો કરતાં મોટો છે, એમ સિદ્ધ કર્યું છે. સારે, અવ તથા અક નો સર્વાળો વડ તથા ડક ના સર્વાળો કરતાં તે ઘણોજ મોટો થશે. એટલે, અવ તથા અક ના સર્વાળો કરતાં વડ તથા ડક નો સર્વાળો ઓછો છે. (૧ આ. સિદ્ધ થઈ.)

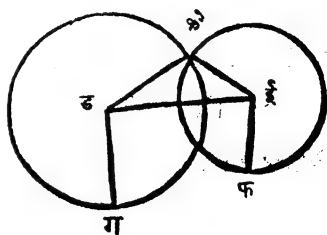
ડર્ડક ત્રિકોણની બહારનો વડક ખૂણો માંહેના ડર્ડક ખૂણો કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે; અને વર્ડક ત્રિકોણની બહારનો ડર્ડક ખૂણો માંહેના અ ખૂણો કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. માટે, અ ખૂણો કરતાં તે ડ ખૂણો ઘણોજ મોટો છે. એ (૨ આ.) સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૨૨ મી કૃત્ય.

કાઈ (અ, વ, ક) ત્રણ સીધી લીટીઓ આપેલી છે, એવી કે, તેઓ માંહેલી કાંઈપણ બેનો સર્વાળો ત્રીજી કરતાં મોટો છે તે, જેની બાજુઓ અનુક્રમે આપેલી લીટીઓની બરાબર થાય, એવા એક ત્રિકોણ કરવાનું.

સાધન.

કાંઈપણ ઢ બિંદુથી આપેલી લીટીઓમાંની અ ની બરાબર ડર્ડ લીટી (૨ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને તેજ બિંદુથી અ _____ આપેલી લીટીઓમાંથી બીજી વ ની બરાબર ડગ વ _____ (૨ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને ર્ડ બિંદુથી ક ની બરાબર ક _____ (૨ પ્રતિ. પ્ર.) ર્ક દોરો. વળી, ઢ મધ્ય બિંદુથી ડગ ત્રિજ્યાએ (૩ સ્વી. પ્ર.) એકજોળ કરો. અને ર્ડ મધ્ય બિંદુથી ર્ક ત્રિજ્યાએ બીજો જોળ પણ (૩ સ્વી. પ્ર.) કરો. અને આ જોળોના કે છેદન બિંદુથી કેડ તથા કેર્ડ (૧ સ્વી. પ્ર.) માંડો. ઢકેર્ડ થશે.



સિદ્ધતા.

ડકેઈ ત્રિકોણની ડઈ બાજુ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) અ ની બરાબર રાખેલી છે. ડકે અને ડગ એકજ મોટા ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી, (૧૫ બા. પ્ર.) તેઓ બરાબર છે. ડગ, વ ની બરાબર રાખેલી છે એટલે, ડકે (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) વ ની બરાબર છે. તેજ પ્રમાણે કેઈ તથા ફઈ નાના ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે; તેથી, તે બંને (૧૫ બા. પ્ર.) બરાબર છે. અને ફઈ, ક ની બરાબર રાખેલી છે. એટલે, ક લીટી (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) કેઈ ની બરાબર છે. તેથી, ડકેઈ ત્રિકોણની ડઈ, ડકે તથા કેઈ બાજુઓ અનુક્રમે આપેલી અ, વ તથા ક સીધી લીટીઓની બરાબર છે. એટલે કરવાનો ત્રિકોણ ડકેઈ થયો એ સિદ્ધ.

૧. ત્રણ લીટીઓમાંથી કોઈ એક લીટીના દરેક છેડા બિંદુથી બાકીની બે લીટીઓ બરાબર લીટીઓ દોરવી. અને પછી સંધાએલા છેડાઓને મધ્યબિંદુ ધારી બાકીની લીટીઓ જોડેલી ત્રિજ્યાએ ગોળો દોરવા, એ અવશ્યનું છે.

૨. બે લીટીઓનો સર્વાળો ત્રીજી કરતાં મોટો હોય તોજ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકે. (૨૦ મી પ્રતિજ્ઞા જુઓ.) અને એમ હોય તોજ બે ગોળો એકબીજાને છેદે. બે ગોળો છેદાવાજ જોઈએ, એ, આ પ્રતિજ્ઞામાં અવશ્યનું છે.

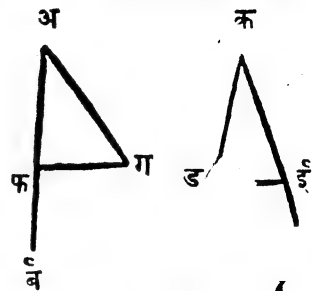
૩. બે લીટીઓનો સર્વાળો ત્રીજીની બરાબર હોય તો, બંને ગોળનો પરિધ એક બીજાને સ્પર્શ કરશે; પણ, છેદાશે નહિ; તેમ બે બાજુનો સર્વાળો ત્રીજી કરતાં નાનો હોય તો ગોળનો પરિધ ન છેદાતાં જૂદા જૂદા ગોળ થાય; અને તેથી આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકશે નહિ.

૪. ત્રણ લીટીઓ બરાબર હોય તો, આ પ્રતિજ્ઞા પહેલી પ્રતિજ્ઞા જેવીજ થાય.

પ્રતિજ્ઞા ૨૩ મી કૃત્ય.

— નધી બીટીમાં આપેલા (અ) બિંદુથી એક

આપેલા ખૂણાની બાજુઓમાં કોઇપણ ડ તથા ફ બિંદુઓ ભે. અને ડફ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અને ડકફ ત્રિકોણની સાથે સમબાજુ (કડ, અફ ની કફ, અગ ની અને ડફ, ફગ ની બરાબર) થાય એવો એક કબજા ત્રિકોણ (૨૨ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. એટલે કબજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ



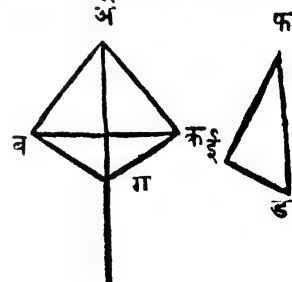
અનુક્રમે ડકફ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની બરાબર છે. તેથી ડફ તથા ફગ બરાબર બાજુની સામેના ડકફ તથા કબજા ખૂણા (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧. બાવીશમી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે ત્રિકોણ કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવું કે, જે બિંદુથી ખૂણો કરવો હોય, તે બિંદુ ઉપર આપેલા ખૂણાનું શિરોબિંદુ આવે એવી રીતે ત્રિકોણ કરવો જોઈએ.

પ્રતિજ્ઞા ૨૪ મી પ્રમેય.

જો, (વક્ર તથા ફકડ) બે ત્રિકોણોમાં એકની (અવ તથા અક) બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની (ફફ તથા ફક) બે બાજુઓની બરાબર હોય (એટલે, અવ, ફફ ની તથા અક, ફક ની) અને બરાબર બાજુઓથી થયેલા ખૂણાઓમાંથી એક (વક્ર) ખૂણો બીજા (ફકડ) ખૂણા કરતાં મોટો હોય તો, મોટા ખૂણા સામેની (વક્ર) બાજુ નાના ખૂણા સામેની (ફકડ) બાજુ કરતાં મોટી થશે.

અવ બાજુના અ બિંદુથી તે બાજુ સાથે ફકડ ખૂણાની બરાબર (૨૩ પ્રતિ. પ્ર.) વક્ર ખૂણો કરો. અને ફકડ ની બરાબર (૩ પ્રતિ. પ્ર.) અગ કાપો. અને વગ તથા કગ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



વક્ર તથા ફકડ ત્રિકોણોમાં અવ તથા અગ બાજુઓ અનુક્રમે ફફ તથા ફક બાજુઓની બરાબર છે. અને અંતર

૨૫. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, વગ તથા ફડ પાયા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે.

અગ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) ફડ ની બરાબર છે. અને અક તથા ફડ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. તેથી અગ તથા અક બાબુઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર. માટે, ગઅક ત્રિકોણ (૨૫ વ્યા. પ્ર.) સમઘી બાબુ ત્રિકોણ છે તેથી તેના અકગ તથા અગક ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ.) બરાબર છે; પણ વકગ ખૂણા કરતાં અકગ ખૂણો (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. અને અકગ તથા અગક ખૂણા બરાબર છે એમ ઉપર સિદ્ધ કર્યું. માટે, વકગ ખૂણા કરતાં અગક ખૂણો પણ મોટો છે. અને અગક ખૂણા કરતાં વગક ખૂણો (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે; માટે વકગ ખૂણા કરતાં વગક ખૂણો તો ઘ-ણોન મોટો છે.

હવે, વગક ત્રિકોણ લેઈએ તો, તેનો વગક ખૂણો વકગ ખૂણા કરતાં મોટો છે એમ ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે તેથી તેની સામેની વક બાબુ વગ બાબુ કરતાં (૧૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટી છે. અને વગ, ફડ ની બરાબર છે. તેથી ફડ કરતાં વક બાબુ મોટી થઈ એ સિદ્ધ.

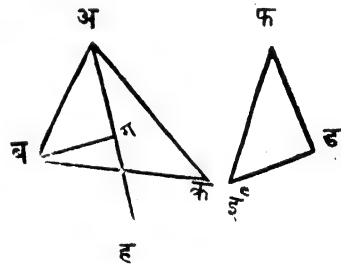
(બીજી રીતે) કદાચ જો ગ બિંદુ વક પાયાથી ઉંચે પડે તો ધારોકે, તે ગ આગળ પડે છે. વગ (૧ રવી.

પ્ર.) સાંધો. હવે વઅગ તથા ફફડ ત્રિકોણોના વગ તથા ફડ પાયા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને અગ તથા વગ લીટીઓનો સર્વાળો અક તથા વક ના સર્વાળા કરતાં (૨૧ પ્રતિ. પ્ર.) ઓછો છે. એ અને વિષમ સર્વાળામાંથી

અગ તથા અક બરાબર લીટીઓ બાદ કરે તો વગ, વક કરતાં (૫ પ્રત્ય-પ્ર.) નાની રહેશે. એટલે, વગ કરતાં વક મોટી છે. અને વગ તથા ફડ બરાબર છે તેથી ફડ કરતાં પણ વક મોટી છે એ સિદ્ધ.

(ત્રીજી રીતે) જો, ગ બિંદુ વક પાયામાં પડે તો, વક બાબુ વગ કરતાં (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટી છે.

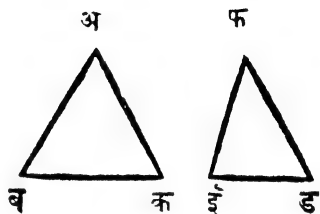
તેના ૨૫ મી પ્રમેય.



નુકમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય (બઝ, ફર્કની તથા અક, ફડ ની) અને ત્રીજી બાજુ (વક) બીજાની ત્રીજી બાજુ (ઈડ) કરતાં મોટી હોયતો; મોટી બાજુની સામે તો વઝક ખૂણા નાની બાજુની સામેના (ઈફડ) ખૂણા કરતાં મોટો થશે.*

જો, અ ખૂણા ફ ખૂણા કરતાં મોટો ન હોય તો, તેની બરાબર હોય અથવા નાનો હોય.

બંને ખૂણા બરાબર નથી. કેમકે, જો એમ હોય તો, વક બાજુ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) ઈડ બાજુની બરાબર થાય. પણ એ ઉપન્યાસથી બહાર છે.



તેમ, વઝક ખૂણા ઈફડ ખૂણા કરતાં નાનો નથી; કેમકે, એમ હોય તો, વક બાજુ (૨૪ પ્રતિ. પ્ર.) ઈડ બાજુથી નાની થાય. એ પણ ઉપન્યાસથી બહાર છે.

જ્યારે, અ ખૂણા ક ખૂણાની બરાબર અથવા તેનાથી નાનો નથી; ત્યારેતો, મોટો થવોજ જોઈએ એ સિદ્ધ.†

પ્રતિજ્ઞા ૨૬ મી પ્રમેય.

જો, (વઝક તથા ડઈફ) બે ત્રિકોણોમાં એકના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજાના બે ખૂણાઓ (વ, ડ ની ક, ફ) ની બરાબર હોય; અને એક ત્રિકોણની ત્રણમાંની ગમે તે એક બાજુ તેની સરખ* સ્થિતિમાં રહેલી બીજા ત્રિકોણની એક બાજુની બરાબર હોય તો; બાકીની બાજુઓ તથા ખૂણાઓ અનુક્રમે એક બીજાની બરાબર થશે.

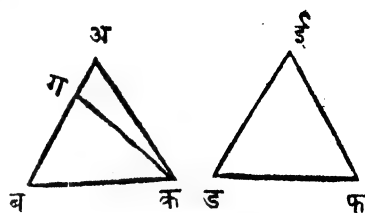
(પહેલી રીતે) ધારો કે, બરાબર ખૂણાઓની વચ્ચે રહેલી વક તથા ડફ બાજુઓ બરાબર છે; ત્યારે, વઝ બાજુ પણ ડઈ બાજુની બરાબર

* ચોવીશમીનો ઉલટ પક્ષ છે. † બહારી સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરી છે.

* એક જેવી સ્થિતિમાં અથવા એક જેવી ત્રિકોણની સ્થિતિ કે દિશા.

છે. કેમકે, જો તે બંને બરાબર ન હોય તો, તેમાંની એક મોટી હોય.

બની શકે તો ધારો કે, બઅ બાબુ ડઈ કરતાં મોટી છે. ત્યારે, ડઈની બરાબરવગ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને ગક (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.

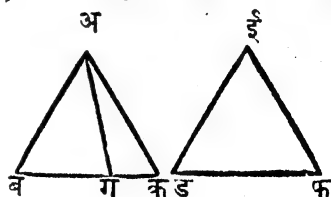


ગવક તથા ઈંડક ત્રિકોણોમાં વગ તથા ડઈ બાબુઓ (આકૃ. રચ. પ્ર.) બરાબર છે. અને વક તથા ડફ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ બ ખૂણો પણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) ડ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, વકગ તથા ડફઈ ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ વકઅ ખૂણો (ઉપન્યાસ પ્ર.) ડફઈ ખૂણાની બરાબર છે. એટલે, વકગ તથા વકઅ ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા; એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે, બઅ બાબુ ડઈ બાબુ કરતાં મોટી નથી; તેમ નાની પણ નહિ થાય તેથી તે બંને બરાબર છે. અને વક તથા ડફ બાબુઓ અને વ તથા ડ ખૂણાઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) અક બાબુ ઈંફની અને અ ખૂણો ઈં ખૂણાની બરાબર છે.

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં બાકીની બાબુઓ તથા ખૂણા બરાબર કરીને રહેવા દીધું છે પણ પછી ચોથી પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી બંને ત્રિકોણો એક રૂપ થાય.

(બીજી રીતે) ધારો કે, ક તથા ફ બરાબર ખૂણાઓની સામેની અવ તથા ઈંડ બાબુઓ બરાબર છે; ત્યારે, વક તથા ડફ બાબુઓ પણ બરાબર થશે.

કેમકે, જો બની શકે તો ધારો કે, તેઓ માંહેલી એક વક બાબુ બીજી ડફ કરતાં મોટી છે. એટલે, ડફ ની બરાબર વગ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને અગ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



અવગ તથા ઈંડક ત્રિકોણોમાં અવ

ના ત્રિકોણો એકરૂપ કરવાને વાસ્તે છે. આગળ ચોથી

તથા વગ બાળુઓ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) અનુક્રમે રૂંડ તથા ડફ બાળુઓની બરાબર છે. અને વ ખૂણા (ઉપન્યાસ પ્ર.) ડ ખૂણાની બરાબર છે. માટે અગત્ય તથા રૂંડ ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે; અને ક ખૂણા પણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) રૂંડ ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, અગત્ય તથા ક ખૂણા (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા, પણ (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) એ, અસંભવિત છે. માટે, વક તથા ડફ બાળુઓ માંહેલી કોઈપણ એક, બીજી કરતાં મોટી નથી. અને તેથી તેઓ બરાબર છે.

વક તથા ડફ બાળુઓ બરાબર છે, અને અવ બાળુ (ઉપન્યાસ પ્ર.) રૂંડ બાળુની બરાબર છે, તેમજ વ ખૂણા પણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) ડ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) અક બાળુ રૂંડ બાળુની અને અ ખૂણા રૂંડ ખૂણાની બરાબર છે.

૧. ગમે તે બે ખૂણા અને તેના સંબંધની ગમે તે એક બાળુ લેઈ આ પ્રતિજ્ઞા ઘણી રીતે સિદ્ધ કરી શકાય.

૨. ઉપર બંને રીતોમાં મોટી બાળુમાંથી નાની બાળુના જેવડી કાપીને પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરી છે. પણ નાની બાળુને મોટીના જેવડી (૩ જ પ્રતિજ્ઞા નીચેની બીજી કલમ મુજબ) વધારીને પણ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરી શકાય.

પ્રતિજ્ઞા ૨૭ મી પ્રમેય.

જો, (રૂંડ) એક સીધી લીટી, (અવ તથા કડ) બે સીધી લીટીઓને છેદે; અને તેથી (અરૂંડ તથા રૂંડ) વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ એક એકની બરાબર થાય તો; આ બંને સીધી લીટીઓ સમાંતર થશે.

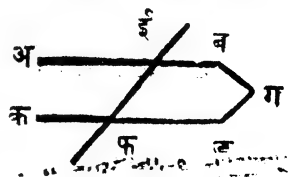
કેમકે, જો બની શકે તો, ધારો કે, તે લીટીઓ સમાંતર નથી. ત્યારે, તેમના વ તથા ડ છેડાની પાર વધારતાં તેઓ ગ આગળ મળે છે. તેથી, રૂંડ ત્રિકોણનો અરૂંડ બહારનો ખૂણો માંહેના

રૂંડ ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે.

પણ ઉપન્યાસ પ્ર. તે બંને બરાબર છે. એ,

અસંભવિત છે. એ માટે, અવ તથા કડ ને

તેના વ તથા ડ

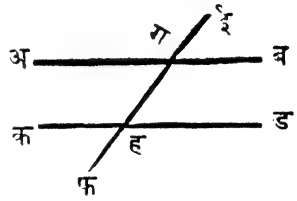


એવું પણ સિદ્ધ થઈ શકશે કે, તેઓને અંક છોડાની પાર વધારતાં પણ મળતી નથી. માટે, જ્યારે એ સીધી લીટીઓ કાઢપણ એક તરફ વધારતાં મળતી નથી ત્યારે, (૩૫ વ્યા. પ્ર.) તેઓ સમાંતર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૨૮ મી પ્રમેય.

જો, (ઈંઙ) એક સીધી લીટી, (અંત્ર તથા કંઙ) બે સીધી લીટીઓને છેદે; અને તેથી બહારનો (ઈંગઅ) ખૂણો, લીટીની એકજ તરફના માંહેના અને સામેના (ગન્ક) ખૂણાની બરાબર હોય (૧ વ્યા.); અથવા એકજ તરફના માંહેના (અગહ તથા કહગ) ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર થાય (૨ વ્યા.); તો એ બે સીધી લીટીઓ અરસપરસ સમાંતર થશે.

ધારો કે, ઈંગઅ તથા ગહક ખૂણાઓ બરાબર છે. અને ઈંગઅ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) ગહક ખૂણાની બરાબર છે. માટે, ગહક તથા ગહહ ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે. પણ તેઓ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ છે માટે, અંત્ર તથા



કંઙ સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે. (જો, ઈંગઅ તથા ગહક ખૂણાઓ બરાબર કહેલા હોત, તોપણ ઉપર પ્રમાણેજ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકત.)

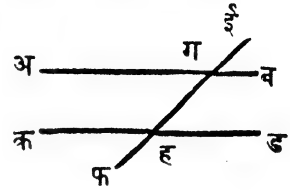
(ખીજી વ્યાખત.) ધારો કે, અગહ તથા કહગ ખૂણાઓનો સર્વાળો (ઉપન્યાસ પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. અને ગહક તથા ગહક ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણાની બરાબર છે. માટે, અગહ તથા કહગ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૧ પ્રત્ય. પ્ર.) ગહક તથા કહગ ખૂણાઓના સર્વાળો બરાબર છે. એમાંથી કહગ ખૂણો જે એ બંનેમાં સામાન્ય (સાધારણ) રહેલો છે તે બાદ કરો. એટલે, બાકીનો અગહ ખૂણો (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) ગહક ખૂણાની બરાબર રહેશે. પણ તેઓ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ છે માટે, અંત્ર તથા કંઙ સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે. (જો ગહક તથા કહગ ખૂણાઓ બરાબર કહેલા હોત, તોપણ ઉપર પ્રમાણેજ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકત.)

પ્રતિજ્ઞા ૨૯ મી પ્રમેય.

જો, (ઈંઙ) સીધી (અંત્ર તથા કંઙ) બે સમાંતર સીધી

બરાબર થાયછે. (પહેલી બા.); અને બહારનો (ઈંગઅ) ખૂણો એકજ તરફના માંહેના અને સામેના (ગહક) ખૂણાની બરાબર થાયછે. (૨ બા.); અને એકજ તરફના માંહેના (અગહ તથા કહગ) બે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર થાયછે (ત્રીજી બા.).*

જો, અગહ તથા ગહડ બંને વ્યુત્ક્રમ ખૂણા બરાબર ન હોય તો ધારો કે, તેઓ માંહેનો એક અગહ બીજા ગહડ ખૂણા કરતાં મોટો છે. એ બંને વિષય પરિમિતોની સાથે વગહ ખૂણો મેળવ્યો તો, અગહ તથા વગહ ખૂણાઓનો સર્વાળો, વગહ તથા ગહડ ખૂણાના સર્વાળા કરતાં (૪ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો થશે.



પણ અગહ તથા વગહ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, વગહ તથા ગહડ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે. અને તેથી અવ તથા કડ લીટીઓ વધારીશું તો, તેઓ (૧૨ પ્રત્ય. પ્ર.) વડ તરફ મળશે. પણ, (ઉપન્યાસ પ્ર.) તેઓ સમાંતર છે. તેથી, મળી શકતી નથી. એ, અસંભવિત છે. માટે અગહ તથા ગહડ ખૂણાઓ માંહેલો કોઈપણ એક બીજા કરતાં મોટો નથી. સારે, તેઓ બરાબર છે. (એજ પ્રમાણે વગહ તથા ગહક ખૂણાઓ બરાબર છે એમ સિદ્ધ થઈ શકે.)

(બીજી બા.) બહારનો ઈંગઅ ખૂણો માંહેના ગહક ખૂણાની બરાબર છે. કેમકે, ઈંગઅ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) વગહ ખૂણાની બરાબર છે. અને વગહ ખૂણો (આ પ્રતિજ્ઞાની પહેલી બા. પ્ર.) ગહક વ્યુત્ક્રમ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, ઈંગઅ તથા ગહક ખૂણા (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે. (એજ પ્રમાણે ઈંગવ તથા ગહડ ખૂણાઓ બરાબર છે એવું સિદ્ધ થઈ શકે.)

(ત્રીજી બા.) એકજ તરફના અગહ તથા કહગ માંહેના ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે. કેમકે, ઈંગઅ* તથા ગહક ખૂણાઓ

* ૨૭ તથા ૨૮ મી પ્રતિજ્ઞાનો ઉલટ પક્ષ છે.

* આ ખૂણાને બદલે વગહ લેખએ તો (આ પ્રતિજ્ઞાની ૨૭ તથા ૨૮ મી પ્રતિજ્ઞાનો ઉલટ પક્ષ છે) તેની બરાબરનો ગહક

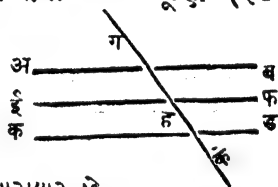
(આ પ્રતિજ્ઞાની ખીજી બા. પ્ર.) બરાબર છે. અને તે બંનેની સાથે જો અગહ ખૂણા મેળવ્યો તો, ઈંગઅ તથા અગહ ખૂણાનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) અગહ તથા ગહક ખૂણાના સર્વાળો બરાબર થશે. અને ઈંગઅ તથા અગહ ખૂણાનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી, અગહ તથા ગહક ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. (એજ પ્રમાણે વગહ તથા ગહક ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે એમ સિદ્ધ થઈ શકે.)

પ્રતિજ્ઞા ૩૦ મી પ્રમેય.

જો, (અવ તથા કડ) બે સીધી લીટીઓ (ઈફ) એકજ સીધી લીટીની સાથે સમાંતર હોય તો; તેઓ અસ્પર્શ સમાંતર થશે.

ધારો કે, ગકે સીધી લીટી તેઓને છેદેછે. તેથી અગહ ખૂણો (૨૯ પ્રતિ. ૧ બા. પ્ર.) ગહક ખૂણાની બરાબર છે.

તેમજ હકેડ ખૂણો પણ (૨૯ પ્રતિની ૨ બા. પ્ર.) ગહક ખૂણાની બરાબર છે. માટે, અગહ



ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) હકેડ (ગકેડ) ખૂણાની બરાબર છે.

હવે, અવ તથા કડ સીધી લીટીઓને ગકે સીધી લીટી છેદેછે; અને તેથી થયેલા અગહ તથા ગકેડ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ બરાબર છે તેથી અવ તથા કડ સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ, પ્ર.) સમાંતર છે.

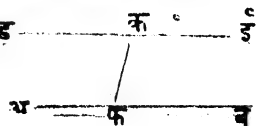
૧. જો ઈફ લીટીની સાથે બે લીટીઓ સમાંતર છે તે ઈફ લીટી વચ્ચે ન આપતાં ગમે તે એક તરફ આપી હોય, તો પણ સિદ્ધતા થઈ શકે.

પ્રતિજ્ઞા ૩૧ મી કૃત્ય.

એક આપેલા (ક) બિંદુનીપાસે એક આપેલી (અવ) સીધી લીટીને સમાંતર એક સીધી લીટી દોરવાનું.

સાધન.

અવ સીધી લીટીમાં કાઢપણુ ફ બિંદુ લો. અને ફક (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અને ક બિંદુ આગળ અને કફ સીધી



પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને કઈ ને હ સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો એટલે, હઈ લીટી અવ લીટીને સમાંતર થશે.

સિદ્ધતા.

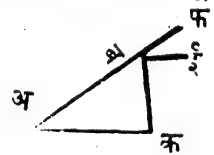
કેમકે, ફક લીટી હઈ તથા અવ લીટીઓને છેદેછે, અને તેથી થયેલા ફક તથા અવક વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, અવ તથા હઈ લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે.

૧. સાધનમાં ૨૩ પ્રતિ. પ્ર. ખૂણો રાખવાનો છે તે વ્યુત્ક્રમજ રાખવો જોઈએ.

પ્રતિજ્ઞા ૩૨ મી પ્રમેય.

કોઈ (અવક) ત્રિકોણની કોઈ પણ (અવ) બાજુને વધારી તો, બહારનો ફવક ખૂણો, માંહેના અને સામેના (અ તથા ક) બે ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબર થશે (૧ બા.); અને હરેક ત્રિકોણના માંહેના ત્રણ ખૂણાઓને સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર થશે (૨ બા.).

વનીપાર અક ને સમાંતર હઈ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. એટલે, ફવઈ ખૂણો (૨૮ પ્રતિ. પ્ર.) માંહેના અવક ખૂણાની બરાબર છે. અને ફવક ખૂણો પણ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) વ્યુત્ક્રમ અવક ખૂણાની બરાબર છે. તેથી ફવઈ તથા ફવક ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨ પ્રસ. પ્ર.) અ તથા ક ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબર છે. અને ફવઈ તથા



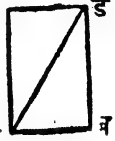
ફવક ખૂણાના સર્વાળા બરાબર આખો ફવક ખૂણો છે. માટે, બહારનો ફવક ખૂણો માંહેના અ તથા ક બે ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબર છે (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)

ફવક ખૂણો (આ પ્રતિજ્ઞાની ઉપલી ૧ બા. પ્ર.) અ તથા ક ખૂણાના સર્વાળા બરાબર છે. તે બંને બરાબર પરિમિતોમાં અવક ખૂણો મેળવીએ તો, ફવક તથા અવક ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨ પ્રસ. પ્ર.) અ તથા ક તથા અવક ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબર છે પણ, ફવક તથા અવક ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, અ તથા ક તથા અવક ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રસ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. એ (૨ બા.)

પ્રતિજ્ઞા ૩૩ મી પ્રમેય.

કાઈ(અથ તથા કડ)એ સમાન અને સમાંતર સીધી લીટીઓના પાસ પાસેના(અ તથા ક અને વ તથા ડ) છેડાઓને સાંધનારી (અક તથા વડ) સીધી લીટીઓ પણ જાતે સમાન (૧ બા.); અને સમાંતર (૨ બા.) થશે.

અ તથા ડ બિંદુઓને (૧ સ્તી. પ્ર.) સાંધા. કડઅ તથા વઅડ ત્રિકોણોમાં કડ તથા અવ બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. અને અડ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને કડઅ તથા વઅડ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. માટે, અક તથા વડ પાયા અને કઅડ તથા વઅડ ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)

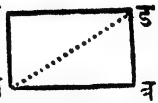


હવે, અડ સીધી લીટી અક તથા વડ સીધી લીટીઓને છેદે છે, અને વ્યુત્ક્રમ (કઅડ તથા વઅડ) ખૂણાઓ બરાબર કરે છે. માટે, અક તથા વડ સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે એ (૨ બા.) સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૩૪ મી પ્રમેય.

એક (અડ) સમાંતર બાજુ યોખૂણની (અથ તથા કડ અને અક તથા વડ) સામસામેની બાજુઓ અસ્પર્શ બરાબર છે (૧ બા.); તેમજ (અ તથા ડ અને ક તથા વ) સામસામેના ખૂણાઓ પણ બરાબર છે (૨ બા.); અને સમાંતર બાજુ યોખૂણ જાતે તેની (અડ) કર્ણ લીટીથી દુભંગાએલો છે (૩ બા.).

કડ તથા અવ સમાંતર સીધી લીટીઓને અડ છેદે છે. તેથી, અડક તથા ડઅવ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ કઅ તથા ડવ સીધી લીટીઓને અડ લીટી છેદે છે. તેથી, અડક તથા ડઅક વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ પણ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, અકડ તથા ડઅવ ત્રિકોણોમાં કડઅ તથા ડઅક ખૂણાઓ અનુક્રમે ડઅવ ત્રિકોણના ડઅવ તથા અડઅ ખૂણાની બરાબર છે. અને અડ બાજુ બંને ત્રિકોણોમાં સામાન્ય છે તેથી (૨૬ પ્રતિ. પ્ર.) કડ બાજુ અવ બાજુની અને અક તે વડ બાજુની બરાબર છે. (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)



અતઃપ્રતિજ્ઞા ૩૪ મી પ્રમેય (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)

અતઃપ્રતિજ્ઞા ૩૪ મી પ્રમેય (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)

ખૂણાઓનો સર્વાંગો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. અને કઢવ તથા ઢબખ ખૂણાઓનો સર્વાંગો પણ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. એ બંનેમાંથી અનુક્રમે ક તથા વ બરાબર ખૂણાઓ બાદ કર્યાં તો બાકીના કઅવ તથા કઢવ ખૂણા (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. (અગર અઢક તથા ઢઅવ બરાબર ખૂણાઓમાં અઢવ તથા ઢઅવ બરાબર ખૂણાઓ ઉમેર્યાં તો આખા કઅવ તથા કઢવ ખૂણા (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થશે. ૨ બા. સિદ્ધ થઈ.)

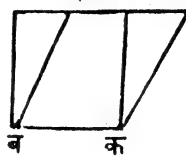
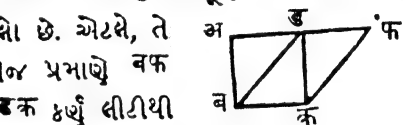
હવે, કઢઅ તથા ઢઅવ ત્રિકોણોમાં કઢ બાજુ (આ પ્રતિસાની પહેલી બા. પ્ર.) અવ બાજુની બરાબર છે; અઢ બાજુ બંનેમાં સાધારણ છે; અને કઢઅ ખૂણો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) ઢઅવ ખૂણાની બરાબર છે માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બંને ત્રિકોણો બરાબર છે. એટલે, અઢ સમાંતર બાજુ ચોખૂણાના તેની અઢ કર્ણ લીટીથી કઢઅ તથા ઢઅવ બે ત્રિકોણો થયેલા છે તે બંને બરાબર થયા. એટલે, અઢ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ તેની અઢ કર્ણ લીટીથી દુભંગાયો (એ ત્રીજી બા. સિદ્ધ થઈ).

પ્રતિજ્ઞા ૩૫ મી પ્રમેય.

એકજ (વક) પાયા ઉપરના તથા એકજ (વક તથા અક) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (વઢ તથા વક) સમાંતર બાજુ ચોખૂણો* બરાબર છે.

(પહેલી રીતે) કેમકે, વઢ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ તેની વઢ કર્ણ લીટીથી (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) દુભંગાયેલો છે. એટલે, તે અ વઢ ત્રિકોણથી બન્યો છે. તેજ પ્રમાણે વક સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ પણ તેની વક કર્ણ લીટીથી (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) દુભંગાયેલો છે. એટલે, તે પણ વઢ ત્રિકોણથી બન્યો છે. તેથી, વઢ તથા વક સમાંતર બાજુ ચોખૂણો (૬ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

(બીજી રીતે) અથવા આ સાચેની આકૃતિઓ પ્રમાણે ચોખૂણો હોય તો વઅક તથા કઢક ખૂણાઓ અને વઢઅ તથા કકઢ ખૂણાઓ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને અવ તથા ઢક બાજુઓ પણ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. માટે, (૨૬ પ્રતિ. ની બીજી



(૧ આકૃતિ.)

(૨ આકૃતિ.)

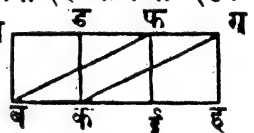
*અને બેજ ચોખૂણો લેઈ બતાવ્યા છે પણ ગમે તે બા. રીતે એકજ પાયા ઉપરના તથા એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (વઢ તથા વક) સમાંતર બાજુ ચોખૂણો બરાબર છે.

રીત પ્ર.) વજ્રઈ તથા કઢફ ત્રિકોણો બરાબર છે; હવે, વજ્રફક ત્રાપીજ્ય-
મમાંથી વજ્રઈ ત્રિકોણ બાદ કરીએ તો, બાકી વજ્ર સમાંતર બાજુ ચો-
ખૂણુ અને વજ્રફક ત્રાપીજ્યમમાંથી કઢફ ત્રિકોણ બાદ કરીએ તો
બાકી વજ્ર સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ રહેશે તેઓ બંને (૩ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર
રહેશે* (બંને આકૃતિઓમાં ઉપરની સિદ્ધતા લાગુ થશે.)

પ્રતિજ્ઞા ૩૬ મી પ્રમેય.

બરાબર (વજ્ર તથા રૂઢ) પાયા ઉપરના અને એકજ (વજ્ર તથા અગ) સમાંતર સીધી લીટીઓની વચ્ચેના (વજ્ર તથા રૂઢ) સમાંતર બાજુ ચો-
ખૂણુ બરાબર છે.

વજ્ર તથા કગ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વજ્ર તથા રૂઢ લીટીઓ (ઉપ-
ન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. અને રૂઢ તથા ફગ અ
(૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, વજ્ર તથા
ફગ (૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે. અને તેઓ
(ઉપન્યાસ પ્ર.) સમાંતર પણ છે. માટે, તેઓના છેડાને સાંધનારી વજ્ર
તથા કગ લીટીઓ પણ (૩૩ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે એટલે, વગ (૨૯ અ
વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ થયો. માટે, વજ્ર એકજ પાયા ઉપરના
અને વજ્ર તથા અગ એકજ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના વજ્ર તથા વગ સમાં-
તર બાજુ ચોખૂણુ (૩૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેજ પ્રમાણે ફગ પાયા
ઉપરના અને વજ્ર લીટી વચ્ચેના વગ તથા રૂઢ એ બંને ચોખૂણુ પણ (૩૫
પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, વજ્ર તથા રૂઢ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ
(૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.



* ઉપરની સિદ્ધતામાં અવ તથા રૂક બાજુ ભેવાને બદલે અઈ તથા
રૂફ ભેધને (૨૬ પ્રતિ. ની ૧ બા. પ્ર.) વજ્રઈ તથા કઢફ ત્રિકોણો બરા-
બર થઈ શકે. કેમકે, અઈ તથા રૂક બાજુઓ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર
છે. તેમજ વજ્ર અને રૂફ બાજુઓ પણ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે
તેથી અઈ તથા રૂફ બાજુઓ (૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમાંથી રૂઈ
બાદ કરવાથી (ત્રીજા પ્રસ. પ્ર.) અઈ તથા રૂફ બાજુઓ બરાબર રહેશે.
(૧ લી આકૃતિ જુઓ.)

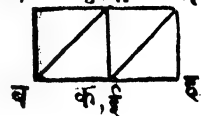
અને અઈ તથા રૂફ માં રૂઈ મેળવવાથી અઈ તથા રૂફ (૨ પ્રસ.

બાજુ આકૃતિ જુઓ.)

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં એવું ધારી લીધેલું છે કે, ખરાબર પાયાએને એકજ સીંદી લીટીમાં મૂકેલા છે. જો, એ પ્રમાણે ન હોય તો પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકશે નહિ.

૨. સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાનાં જ એ બિંદુઓ સાંધવાનાં છે. તેઓ ફરેક ચોખ્ખાની એકજ તરફનાં અને વ્યુત્ક્રમ જેઠાં.

(ખીજી રીતે) સરખા પાયા જોડાજોડ લેવાથી અ ક, ફ ગ પાસેની આકૃતિમાં ઉપરની સિદ્ધતા લાગુ થશે.

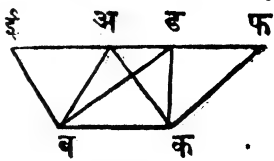


પ્રતિજ્ઞા ૩૭ મી પ્રમેય.

એકજ (બક) પાયા ઉપરના અને એકજ (બક તથા અઢ) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (બઅક તથા બઢક) ત્રિકોણો ખરાબર* છે.

કઅ ને સમાંતર બ બિંદુની પાર બઈ અને બઢ ને સમાંતર પણ ક બિંદુમાંથી કફ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો.

અને બઈ ને મળતાં સુધી અને ખીજી તરફ કફ ને મળતાં સુધી અઢ ને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. એટલે, બઈઅક તથા બઢક



(૨૯ અ બા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા થશે. અને તેઓ એકજ બક પાયા ઉપર અને એકજ ફંફ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે તેથી (૩૫ પ્રતિ. પ્ર.) તેઓ ખરાબર છે; અને બઅક ત્રિકોણ બઈઅક સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાનાં અને બઢક ત્રિકોણ બઢક સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાનાં (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) અર્થ છે. માટે તે બંને અર્થો (૭ પ્રત્ય. પ્ર.) ખરાબર છે. એટલે, બઅક તથા બઢક ત્રિકોણો ખરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં માત્ર બેજ ત્રિકોણો ખરાબર કરી બતાવ્યા છે. પણ, બે કરતાં વધારે ત્રિકોણો આપ્યા હોય તો, તેઓ પણ ખરાબર છે એમ સિદ્ધ થાય.

પ્રતિજ્ઞા ૩૮ મી પ્રમેય.

ખરાબર (બક તથા ફંફ) પાયા ઉપરના અને એકજ (બક તથા

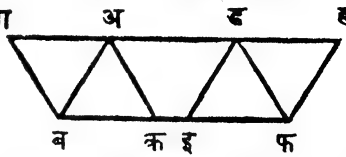
* ક્ષેત્રફળમાં ખરાબર, પણ એકરૂપ કહેવાય નહિ. માટે, છવીશમી પ્રતિજ્ઞા નીચેની ટિકામાં આ પ્રતિજ્ઞા આવે નહિ.

અડ)સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (વચક* તથા ફફ*) ત્રિકોણો બરાબર*છે.

બ બિંદુની પાર અક ને સમાંતર ગ અ ઢ હ

વગ લીટી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો.

અને ક બિંદુની પાર ફફ ને સમાંતર (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) ફફ દોરો. અડ લીટી વગ ને મળતાં સુધી અને બીજી તરફ ફફ ને મળતાં સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. એટલે, ગવચક તથા ફફફફ (૨૯ અ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાબુ ચોખ્ખો થશે. અને તેઓ (૩૬ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, વચક ત્રિકોણ ગવચક ચોખ્ખું અને ફફફ ત્રિકોણ ફફફફ ચોખ્ખું (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) અર્થ છે. તેથી, (૭ પ્રત્ય. પ્ર.) તે બંને અર્ધો બરાબર છે. એટલે, વચક ત્રિકોણ ફફફ ત્રિકોણની બરાબર છે એ સિદ્ધ.

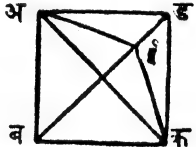


૧. બરાબર પાયાઓ એકજ લીટીમાં મૂક્યા છે એવું ઉપન્યાસમાં ધારેલું છે.

પ્રતિજ્ઞા ૩૯ મી પ્રમેય.

એકજ (વક) પાયા ઉપરના અને તેની એકજ તરફના (વચક તથા વચક) બરાબર ત્રિકોણો એકજ (વક તથા અડ) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે.*

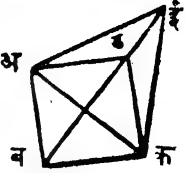
અ તથા ઢ ને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વક ને સમાંતર અડ છે. કેમકે, બે બે લીટીઓ સમાંતર ન હોય તો, વક ને અ ઢ સમાંતર અ બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) અર્ધ દોરો. અને ફફ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વક તથા અર્ધ લીટીઓ સમાંતર છે. તેથી, વચક તથા વર્ધક ત્રિકોણો (૩૭ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને વચક ત્રિકોણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) વચક ત્રિકોણની બરાબર છે. માટે, વર્ધક તથા વચક ત્રિકોણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા. પણ, વર્ધક ત્રિકોણનો વચક ત્રિકોણ એક ભાગ છે. માટે, ભાગ એ આખાની બરાબર થાય એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે, અર્ધ લીટી વક ને સમાંતર નથી. અને એજ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, અડ વગર બીજી કોઈપણ લીટી વક ને સમાંતર નથી. માટે, અડ એજ વક ને સમાંતર છે.



* માત્ર એજ ત્રિકોણ સમજવાના નથી. વધારે હોય તો પણ એ પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે. * સાડત્રીશમી પ્રતિજ્ઞા તબેની નોટ જુઓ.

— નોટ નોટ નોટ પદ છે.

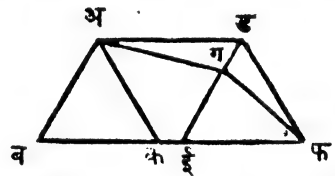
(ખીજી રીતે) કદાચ, અ બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) વક્ર ને સમાંતર દોરેલી અર્ધ લીટી અડ લીટીથી જોયે પડે તો, વક્ર ને ર્ધ સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને ર્ધક (૧ સ્વી. પ્ર.) અ સાંધો. (પછી ઉપર પહેલી રીતમાં કહેલી બધી સિદ્ધતા લાગુ થશે.)



પ્રતિજ્ઞા ૪૦ મી પ્રમેય.

બરાબર (વક્ર તથા ર્ધક) પાયા ઉપરના અને એકજ તરફના (વઅક) તથા (ર્ધક) બરાબર ત્રિકોણો એકજ (વક્ર તથા અડ) સમાંતર લીટી-ઓની વચ્ચે છે.*

અ તથા ઢ ને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. એટલે, વક્ર ને સમાંતર અડ થશે. ક્રમક્ર, જો અડ લીટી સમાંતર ન હોય તો, વક્ર ને સમાંતર અ બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) અગ દોરો. અને ગક (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



અગ સીધી લીટી (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) વક્ર ને સમાંતર છે, અને વક્ર તથા ર્ધક બરાબર છે; તેથી, વઅક અને ર્ધક ત્રિકોણો (૩૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ ર્ધક (ઉપન્યાસ પ્ર.) વઅક ત્રિકોણની બરાબર છે. માટે, ર્ધક તથા ર્ધક ત્રિકોણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા. પણ ર્ધક ત્રિકોણ ર્ધક ત્રિકોણનો ભાગ છે એટલે, ભાગ એ આખાની બરાબર થાય એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે, અગ લીટી વક્ર ને સમાંતર નથી. અને એ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, અડ વગર ખીજી કોઈપણ લીટી વક્ર ની સાથે સમાંતર નથી. એટલે, અડ લીટીજ વક્ર લીટીની સાથે સમાંતર છે એ સિદ્ધ*.

(ખીજી રીતે) કદાચ, વક્ર ને સમાંતર અ બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.)

* આડત્રીશમીનો ઉલટ પક્ષ છે. * ઉલટી સિદ્ધતાથી જોયે...

દોરેલી અગ લીટી અઢ લીટીથી
જાએ પડે તો, રૂંઢ ને ગ સુધી
(૨ સ્વી. પ્ર) વધારો. અને ગફ
(૧ સ્વી. પ્ર) સાંધો. ઉપર પહેલી
રીતમાં કહેલી બધી સિદ્ધતા લાગુ પડશે.

પ્રતિજ્ઞા ૪૧ મી પ્રમેય.

જો, એક (વઢ) સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાનું અને એક (વરૂંક) ત્રિકોણનું પાચો એકજ હોય, અને તેઓ એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે હોય તો, સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા ત્રિકોણથી બમણો થશે.

અ તથા ક બિંદુઓ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.

હવે, વઅક તથા વરૂંક ત્રિકોણો એકજ વક પાયા ઉપર અને વક તથા અરૂં એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે. માટે (૩૭ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે.

પણ વઢ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા તેના અક કણુંથી (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) દુભગાયો છે એટલે વઅક ત્રિકોણથી વઢ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા બમણો છે. માટે વઅક ત્રિકોણની બરાબરના વરૂંક ત્રિકોણથી પણ વઢ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા બમણો છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૨ મી કૃત્ય.

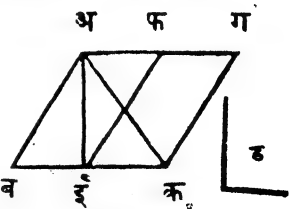
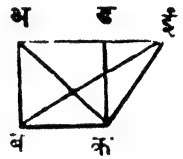
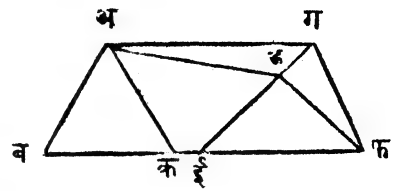
એક આપેલા (વઅક) ત્રિકોણની બરાબર અને જોનો એક ખૂણો એક આપેલા (ઢ) ખૂણાની બરાબર થાય એવો એક સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા કરવાનું.

સાધન.

અ બિંદુની પાર વક ને સમાંતર અક સીધી લીટી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને ત્રિકોણના વક પાયાને રૂં આગળ

(૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભગો. અને કરૂં સીધી લીટી સાથે રૂં બિંદુ આગળ, કહેલા ઢ ખૂણાની બરાબર (૨૩ પ્રતિ. પ્ર.) કરૂંક ખૂણો કરો. અક લીટીને ગ આગળ મળે સાંધી ક ની પાર રૂં ને સમાંતર

(૨૨ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. એટલે, કરવાનો સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા કક છે.



સિદ્ધતા.

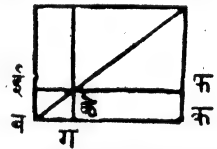
કેમકે, ર્ફ (આફ. રચ. પ્ર.) અગ ને સમાંતર છે. અને ર્ફ પશુ કગ ની સાથે સમાંતર છે. તેથી, કફ (૨૯ અ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુ છે.

વળી, વઅર્ફ અને ર્ફ બંને ત્રિકોણો, વર્ફ અને ર્ફ બરાબર પાયા ઉપર અને એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે. માટે, (૩૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, આખો વઅર્ફ ત્રિકોણ ર્ફ ત્રિકોણથી બમણો છે. અને ર્ફ ત્રિકોણથી કફ સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુ પશુ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બમણો છે. માટે, વઅર્ફ ત્રિકોણ તથા કફ સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુ બંને (૫ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે અને તેનો કર્ફ ખૂણો આપેલા ઢ ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, કરવાનો સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુ કફ છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૩ મી પ્રમેય.

એક (અક) સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુમાં ધર્ણ લીટીની આસપાસની (ર્ફ તથા કફ) સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુઓની (અકે તથા કકે) પુરવણીઓ બરાબર છે.

વડ ધર્ણ લીટી દોરો. અને તે માંહેલા કાઢપશુ કે બિંદુની પાર વક ને સમાંતર ર્ફ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને તેજ બિંદુથી અવ ને સમાંતર ગહ પશુ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો ત્યારે, ધર્ણ લીટીની અ હ ઢ આસપાસના ર્ફ તથા કફ (૨૯ અ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુ છે. અને અકે તથા કકે તેની પુરવણીઓ છે.



અક સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુના તેની વડ ધર્ણ લીટીથી થયેલા વઅર્ફ તથા વકઢ ત્રિકોણો (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. વળી, કફ સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુની કેઢ ધર્ણ લીટીથી થયેલા કેહઢ તથા કેફઢ ત્રિકોણો પશુ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે; અને તેજ કારણથી ર્ફ સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુની વકે ધર્ણ લીટીથી થયેલા વર્ફકે તથા વગકે ત્રિકોણો બરાબર છે. તેથી કેહઢ તથા વર્ફકે ત્રિકોણોનો સર્વાળો (૨ પ્રસ. પ્ર.) કેફઢ તથા વગકે ત્રિકોણોના સર્વાળો બરાબર છે.

આ બરાબર કરેલા સર્વાળો (કેહઢ + વર્ફકે ત્રિકોણો તથા કેફઢ + વગકે ત્રિકોણો) ને વઅર્ફ તથા વકઢ બરાબર ત્રિકોણોમાંથી

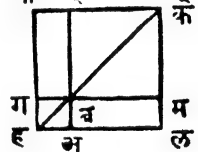
એટલે, બાકી અંકે તથા કંકે પૂરવણીઓ રહેશે તે (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે.

પ્રતિજ્ઞા ૪૪ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (અ) સીધી લીટી ઉપર, એક આપેલા (ક) ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો એક ખૂણો આપેલા એક (ઢ) ખૂણાની બરાબર થાય એવો એક સમાંતર બાજુઓખૂણું કરવાનું.

સાધન.

આપેલા ક ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો વ ખૂણો આપેલા ઢ ખૂણાની બરાબર થાય અને વર્ડે લીટી અંક ની સાથે એકજ સીધી લીટીમાં થાય એવો વર્ડે ફગ સમાંતર બાજુ યોખૂણું (૪૨ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને ફગ (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને અ ની પાર વગ ને સમાંતર ક ઈ અંક (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને હવ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



હવે, હલ તથા ફકે સમાંતર

છે. તેથી લહફ તથા હફકે ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. અને તેથી વહફ તથા હફકે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઘ્યોછો છે. એ માટે, હવ તથા ફર્ડ ને વધારીએ તો, તેઓ (૧૨ પ્રત્ય. પ્ર.) મળી નવી બેઠાએ. ધારો કે, કે આગળ તેઓ મળેછે. હવે, કે બિંદુથી હફ ને સમાંતર કોલ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને અંક ને લ બિંદુ સુધી તથા વગ ને મ બિંદુ સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. એટલે અમ (૨૯ અ બા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ યોખૂણું થશે. અને તે, જે સમાંતર બાજુ યોખૂણું કરવાનો હતો તેજ છે.

સિદ્ધતા.

કેમકે, ફલ સમાંતર બાજુ યોખૂણામાં હકે કર્ણ લીટીની આસપાસના સમાંતર બાજુ યોખૂણાની અમ તથા ગર્ડ પૂરવણીઓ (૪૩ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ ગર્ડ (આકૃ. ૨૫.) ક ત્રિકોણની બરાબર છે. માટે, અમ યોખૂણું પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) ક ત્રિકોણની બરાબર છે. તેમજ ર્ડવગ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ પ્ર.) અંકમ ખૂણાની બરાબર છે. અને ર્ડવગ (આકૃ. ૨૫.) ઢ ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, ઢ ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) અંકમ ખૂણાની બરાબર છે. એટલે,

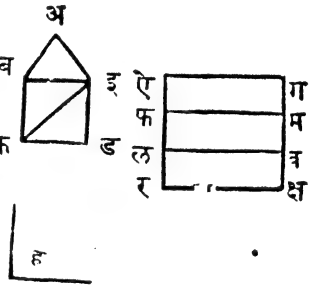
કરવાનો સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ અમ છે. તે આપેલી અવલીટી ઉપર કીધેલો છે; આપેલા ક ત્રિકોણની બરાબર છે; અને જેનો અવર્ત ખૂણો આપેલા ડ ખૂણાની બરાબર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૪૫ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (અવકર્ડઈ) સીધી લીટી આકૃતિની બરાબર અને જેનો એક ખૂણો એક આપેલા હ ખૂણાની બરાબર થાય એવો એક સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ કરવાનું.

સાધન.

આપેલી સીધી લીટી આકૃતિના ત્રિકોણો કરો, અને તેટલા સાડ વર્ડ તથા કઈ (૧ સ્તી. પ્ર.) સાંધો. વર્ડ ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો એક એ ખૂણો આપેલા હ ખૂણાની બરાબર એવો એક ફગ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૪૪ વ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. તેની એક ફમ બાજુ ઉપર કઈ ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો ફ ખૂણો કહેલા હ ખૂણાની બરાબર એવો એક લમ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૪૪ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને તેની લંબ બાજુ



ઉપર કઈ ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો લ ખૂણો આપેલા હ ખૂણાની બરાબર એવો રવ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૪૪ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. (એ પ્રમાણે આકૃતિના જેટલા ત્રિકોણો થયેલા છે, તેમાંના દરેકની બરાબર અને આપેલા ખૂણાની બરાબર ખૂણો રાખીને ૪૪ પ્રતિ. પ્ર. સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ કરવા.) એટલે, આપેલી સીધી લીટી આકૃતિની બરાબર અને જેનો એક હ ખૂણો આપેલા હ ખૂણાની બરાબર એવો એક રગ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ થશે.

સિદ્ધતા.

એ ખૂણો (આકૃ. રચ. પ્ર.) હ ખૂણાની બરાબર છે. અને મફલ ખૂણો પણ આકૃ. રચ. પ્ર. હ ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, એ ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) મફલ ખૂણાની બરાબર છે. એ બંનેમાં મફલ ખૂણો મેળવે તો, એ તથા મફલે ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) મફલ તથા મફલે ખૂણાના સર્વાળો બરાબર થાય. પણ એમ તથા ફમ સમાંતર લીટીઓને

૬ તથા મફદે ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, મફલ તથા મફદે ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે.

હવે, ફેફ તથા ફલ લીટીઓ કમ લીટીના ક બિંદુ આગળ વિરૂદ્ધ બાજુએ મળીને મફલ તથા મફદે ખૂણાઓ કરેછે અને તે બંને ખૂણાનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે તો, ફેફ તથા ફલ મળીને (૧૪ પ્રતિ. પ્ર.) એક અખંડ સીધી લીટી થાય છે. તેજ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, ફલ તથા જર મળીને એક સીધી લીટી થાય છે. એટલે ફેર એક સીધી લીટી છે. વળી, ફેફ લીટી મળી સાથે સમાંતર છે. તેથી ફેફમ ખૂણો (૨૪ પ્રતિ. પ્ર.) બ્યુટકમ કમવ ખૂણાની બરાબર છે. તે બંનેમાં કમગ ખૂણો મેળવો એટલે, ફેફમ તથા કમગ ખૂણાનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) કમવ તથા કમગ ખૂણાની બરાબર છે. પણ, ફેફમ તથા કમગ ખૂણાનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, કમવ તથા કમગ ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, મમ તથા મવ મળીને (૧૪ પ્રતિ. પ્ર.) એક સીધી લીટી થાય છે. એજ પ્રમાણે મવ તથા વહ ને માટે સિદ્ધ થઈ શકે છે. એટલે ગહ સીધી લીટી છે. અને તે ફેર ની સાથે સમાંતર પણ છે; રહ તથા કમ એકજ લવ લીટીની સાથે સમાંતર છે. તેથી રહ લીટી કમની સાથે (૩૦ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે. અને કમ ની સાથે ફેફ તથા રહ સમાંતર છે તેથી, રગ (૨૯ મ વ્યા. પ્ર.) એક સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ છે.

કમ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ કઢઈ ત્રિકોણની અને લમ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ કઢઈ ત્રિકોણની અને રવ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ કઢઈ ત્રિકોણની બરાબર છે. એ બધા સમાંતર બાજુ ચોખૂણાનો સર્વાળો રગ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ છે અને એ બધાં ત્રિકોણોનો સર્વાળો અવકઢઈ આકૃતિ છે માટે આખો રગ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) આપેલી બવકઢઈ આકૃતિની બરાબર છે. અને તેનો ફે ખૂણો આપેલા ૬ ખૂણાની બરાબર છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૬ મી કૃત્ય*.

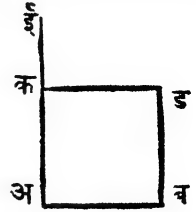
એક આપેલી (અવ) સીધી લીટી ઉપર એક ચોરસ કરવાનું.

*આ છેલ્લી કૃત્ય પ્રતિજ્ઞા છે. આ સ્કંધમાં ૧, ૨, ૩, ૯, ૧૦, ૧૧,

૧૪, ૪૫ અને ૪૬ એ ચૌદ કૃત્ય પ્રતિજ્ઞાઓ છે.

સાધન.

આપેલી અથવા લીટીના અ બિંદુથી અથવા લીટી ઉપર (૧૧ પ્રતિ. પ્ર.) અર્ધ લંબ દોરો અને તેમાંથી અથવા ની બરાબર અંક (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. ક ની પાર અથવા ને સમાંતર કઢ અને વ ની પાર અંક ને સમાંતર વઢ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. એટલે, કરવાનો ચોરસ અંક છે.



સિદ્ધતા.

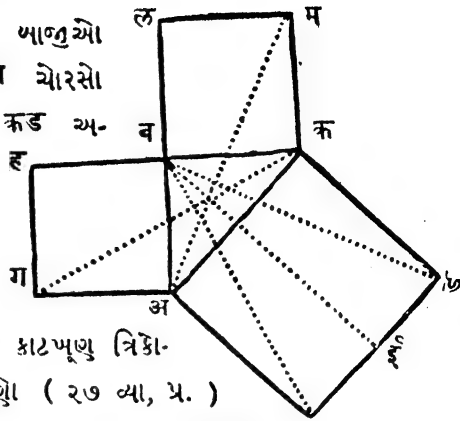
કેમકે, અંક ચોખ્ખાની બંને તરફની સામસામેની બાજુઓ (આકૃ. ૨૫ પ્ર.) સમાંતર છે. માટે તે (૨૯ અ. બા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા છે. તેથી તેની અથવા તથા કઢ સામ સામેની બાજુઓ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર અને તેજ પ્રમાણે અંક તથા વઢ બાજુઓ બરાબર અને અથવાની બરાબર અંક રાખેલી છે. તેથી, અથવા, કઢ, અંક અને વઢ એ ચારે બાજુઓ (૧ પ્રલ. પ્ર.) ચરસપરસ બરાબર છે. તેથી, અંક (૩૦ બા. પ્ર.) સમાંતર સમ-બાજુ ચોખ્ખા અથવા લાંબા છે.

અથવા સીધી લીટી ઉપર અંક લંબ છે. તેથી, વઅંક ખૂણા (૧૦ બા. પ્ર.) કાટખૂણા છે. અને વઅંક તથા કઢવ ખૂણા (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, કઢવ ખૂણા પણ કાટખૂણા હોય, કઢ તથા અથવા સમાંતર લીટીઓને અંક લીટી છેદે છે. તેથી, વઅંક તથા અંકડ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) એ કાટખૂણા બરાબર છે. પણ વઅંક ખૂણા કાટખૂણા છે તો બાકીનો અંકડ ખૂણા પણ કાટખૂણા અને તેની સામેનો અથવા ખૂણા (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) અંકડ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, તે પણ કાટખૂણા એટલે, તે ચારે કાટખૂણા (૧૧ પ્રલ. પ્ર.) બરાબર. માટે, અંક લાંબા (૩૧ બા. પ્ર.) ચોરસ છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૭ મી પ્રમેય.

એક (અથવા) કાટખૂણા ત્રિકોણમાં (અંક) કર્ણનો વર્ગ (સર્વ તથા વક) બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર છે.

અવ, અક તથા વક બાબુઓ
ઉપર અહ, અઢ તથા વમ ચોરસો
(૪૬ પ્રતિ પ્ર.) કરો. અને કઢ અ-
થવા અફ લીટીને સમાંતર
વ બિંદુથી વઠે (૩૧ પ્રતિ.
પ્ર.) દોરો. અને વફ તથા
કગ (૧૨વી. પ્ર.) સાંધો.



અવક ત્રિકોણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) કાટખૂણ ત્રિકો-
ણ છે. તેથી, તેનો અવક ખૂણો (૨૭ વ્યા. પ્ર.)
કાટખૂણો છે. અને અવહ ખૂણો પણ અહ ચોરસનો ફ
ખૂણો છે. માટે, (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેથી, અવક તથા અવહ
ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણો છે.

હવે, વક તથા વહ લીટીઓ અવ લીટીના વ બિંદુ આગળ મળે છે.
અને અવક તથા અવહ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણો બરાબર છે.
માટે, હક (૧૪ પ્રતિ. પ્ર.) અખંડ સીધી લીટી થશે. તેજ પ્રમાણે વઅ
તથા વલ મળીને અલ અખંડ સીધી લીટી થશે.

હવે, અગક તથા અવફ એ બે ત્રિકોણો લઈએ તો, તેની અગ તથા
અવ બાબુઓ અહ ચોરસની બાબુઓ છે માટે (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર
છે. તેમજ અક તથા અફ બાબુઓ પણ અઢ ચોરસની બાબુઓ છે
તેથી (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને વઅગ ખૂણો અહ ચોરસનો ખૂણો
છે માટે (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. અને કઅફ ખૂણો પણ અઢ ચોર-
સનો ખૂણો છે માટે તે પણ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેથી એ બંને
ખૂણો (૧૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે. આ બંને બરાબર ખૂણાઓમાં વઅક
ખૂણો મેળવીએ તો, આબો કઅગ ખૂણો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) વઅફ ખૂણાની
બરાબર થશે. એટલે, અગક તથા અવફ ત્રિકોણોની બંને બાબુઓ તથા
તેથી થયેલા અંતરખૂણો બરાબર થયા, તેથી (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બંને ત્રિકોણો
એક રૂપ છે.

પણ હક લીટી ગઅ સાથે સમાંતર છે તેથી ગઅ એકજ પાયા
ઉપરના અને હક એકજ સમાંતર લીટી વચ્ચેના અગક ત્રિકોણથી અહ
સમાંતર બાબુ ચોખૂણ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બમણો છે. અને તેજ પ્રમાણે અફ

એકજ પાયા ઉપરના અને વર્ડ સમાંતર લીટી વચ્ચેના અવકાશ ત્રિકોણથી અર્ધ સમાંતરબાહુચોખ્ખું બનજો છે. એટલે, અહ તથા અર્ધ સમાંતર બાહુચોખ્ખો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે.

વળી, અમ તથા વડ બિંદુઓને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધવાથી થયેલા મઅક તથા ડવક ત્રિકોણો બરાબર છે. કેમકે, તે બંને ત્રિકોણોની મક તથા વક બાહુઓ એકજ વમ ચોરસની બાહુઓ છે તેથી (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ કઅ તથા કડ પણ એકજ અડ ચોરસની બાહુઓ છે તેથી તેઓપણ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને મકવ ખૂણો વમ ચોરસનો ખૂણો છે માટે, (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેમજ અકડ ખૂણો પણ અડ ચોરસનો ખૂણો છે માટે, તેપણ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેથી (૧૧ પ્રત્ય. પ્ર.) એ બંને ખૂણા બરાબર. તે દરેકમાં વકઅ ખૂણો પ્રથક પ્રથક મેળવીએ તો, આખા મકઅ તથા વકડ ખૂણા (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થશે. એટલે મઅક તથા ડવક ત્રિકોણોમાંથી એકની બે બાહુઓ અને અંતરખૂણો અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાહુઓ અને અંતરખૂણાની બરાબર તેથી (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બંને ત્રિકોણો બરાબર છે.

મક એકજ પાયા ઉપર અને મક તથા અલ એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના મઅક ત્રિકોણ તથા કલ ચોરસ છે તેથી મઅક ત્રિકોણથી કલ ચોરસ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બનજો છે તેમજ કડ એકજ પાયા ઉપર અને વર્ડ એકજ સમાંતરલીટીઓની વચ્ચે ડવક ત્રિકોણ તથા કર્ડ સમાંતરબાહુચોખ્ખું છે તેથી, ડવક ત્રિકોણથી કર્ડ ચોખ્ખું (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બનજો છે.

અહ ચોરસ (ઉપર સિદ્ધ કર્યા પ્રમાણે) અર્ધ સમાંતર બાહુ ચોખ્ખું બરાબર અને કલ ચોરસ કર્ડ સમાંતર બાહુ ચોખ્ખું બરાબર તેથી અહ તથા કલ ચોરસોનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) અર્ધ તથા કર્ડ સમાંતર બાહુ ચોખ્ખોના સર્વાળો બરાબર છે. અને અર્ધ તથા કર્ડ ચોખ્ખો મળીને અડ ચોરસ થયેલો છે એટલે, અહ તથા કલ ચોરસોના સર્વાળો બરાબર અડ ચોરસ છે. અહ તથા કલ ચોરસો આપેલા કાટખૂણુ ત્રિકોણની અવ તથા વક બાહુઓ ઉપર કીધેલા છે. અને અડ ચોરસ અક કર્ણ ઉપર કીધેલો છે. ચોરસને ભૂમિતિવિધામાં વર્ગ કહેછે. માટે, અવક કાટખૂણુ ત્રિકોણમાં

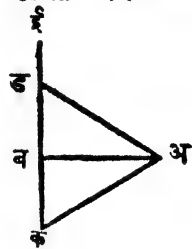
અક કહ્યું લીટીનો વર્ગ અવ તથા વક બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૮ મી પ્રમેય.*

જો, એક (અવક) ત્રિકોણની (અક) એક બાજુનો વર્ગ બીજા (અવ તથા વક) બે બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર હોય તો, તે બાજુની સામેનો (અવક) ખૂણો કાટખૂણો થશે.*

વ બિંદુથી તેની એક અવ બાજુ ઉપર (૧૧ પ્રતિ. પ્ર.) વડે લંબ દોરો; અને વક ની બરાબર વડ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને અડ (૧ સ્ત્રી. પ્ર.) સાંધો.

અવડ ત્રિકોણનો વ ખૂણો કાટખૂણો છે. માટે, તે (૨૭ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણ ત્રિકોણ છે. તેથી, અડ કહ્યું લીટીનો વર્ગ (૪૭ પ્રતિ. પ્ર.) અવ તથા વડ બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર છે. અને વડ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) વક ની બરાબર રાખેલી છે. તેથી, અડ નો વર્ગ અવ તથા વક ના વર્ગોના સર્વાળાની બરાબર છે; પણ અવ તથા વક ના વર્ગોનો સર્વાળો (ઉપન્યાસ પ્ર.) અક ના વર્ગની બરાબર છે. માટે, અડ તથા અક ના વર્ગો બરાબર છે. તેથી, અડ તથા અક લીટીઓ જાતે પણ બરાબર છે; હવે, બંને ત્રિકોણોમાં વડ તથા વક બાજુઓ બરાબર છે અને અવ બાજુ સાધારણ છે. અને અડ તથા અક ઉપર બરાબર કરી તેથી, અવક તથા અવડ ત્રિકોણો અરસ્પ રસ સમબાજુ છે; માટે, (૮ પ્રતિ. પ્ર.) અરસ્પરસ સમખૂણ પણ છે. અને તેથી અવક ખૂણો અવડ ખૂણાની બરાબર છે; પણ અવડ ખૂણો કાટખૂણો છે. તેથી અવક ખૂણો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) કાટખૂણો છે એ સિદ્ધ.



ઉપયોગી અનુમાનો.

પ્રતિજ્ઞા ૫ મી.

અનુમાન ૧ હું--સમબાજુ ત્રિકોણ સમખૂણ છે. કેમકે, હરેક બે બરાબર બાજુઓની સામેના ખૂણો બરાબર છે.

* આ છેલ્લી પ્રમેય પ્રતિજ્ઞા છે. આરંધમાં ૪, ૫, ૬, ૭, ૮, ૯, ૧૦, ૧૧, ૧૨, ૧૩, ૧૪, ૧૫, ૧૬, ૧૭, ૧૮, ૧૯, ૨૦, ૨૧, ૨૨, ૨૩, ૨૪, ૨૫, ૨૬, ૨૭, ૨૮, ૨૯, ૩૦, ૩૧, ૩૨, ૩૩, ૩૪, ૩૫, ૩૬, ૩૭, ૩૮, ૩૯, ૪૦, ૪૧, ૪૨, ૪૩, ૪૪ અને ૪૫ એ યોગીશ પ્રમેય પ્રતિજ્ઞાઓ છે.

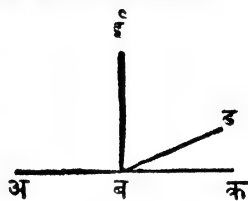
* સૂતાળીશમીનો ઉલટ પક્ષ છે.

પ્રતિજ્ઞા ૬ ઠી.

અનુમાન ૧ હું—સમખૂણુ ત્રિકોણુ સમખાણુ ત્રિકોણુ છે. કેમકે, બે બરાબર ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ બરાબર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૧ મી.

અનુમાન ૧ હું—બે સીધી લીટીઓને સામાન્ય ખંડ હોઈ શકતો નથી. કેમકે, બે હોઈ શકે તો ધારો કે અવક તથા અવડ બે સીધી લીટીઓમાં બનેને અવ. ખંડ સામાન્ય છે. વ બિંદુથી અવ ઉપર વડ લંબ (આ.પ્રતિ.પ્ર.) દોરો. અવક સીધી લીટી છે તેથી (૧૦વ્યા.પ્ર.) કવર્ડ ખૂણો ર્વઅ ખૂણાની બરાબર છે; તેજ પ્રમાણે અવડ



સીધી લીટી છે, તેથી કવર્ડ ખૂણો ર્વઅ ખૂણાની બરાબર છે; માટે ર્વડ ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) કવર્ડ ખૂણાની બરાબર છે પણ એ (૯પ્રત્ય.પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે બે સીધી લીટીઓને સામાન્ય ખંડ હોઈ શકતો નથી.

પ્રતિજ્ઞા ૧૩ મી.

અનુમાન ૧ હું—એકજ સીધી લીટી ઉપર એકજ બિંદુ આગળ ફેટલીએક સીધી લીટીઓ પડીને તેની સાથે જે ખૂણાઓ કરે, તે સઘળા ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે.

અનુમાન ૨ જું—જે બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદીને ખૂણાઓ કરે તો આ સઘળા ખૂણાઓનો સર્વાળો ચાર કાટખૂણા બરાબર છે.

અનુમાન ૩ જું—ફેટલીએક સીધી લીટીઓ એકજ બિંદુથી કેંદ્રવિચળ થાય તો તેથી આસપાસના અવકાશમાં જે ખૂણાઓ થાય તેઓનો સર્વાળો ચાર કાટખૂણા બરાબર થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૮ મી.

અનુમાન ૧ હું—એક ત્રિકોણમાંની એક બાજુ બીજી બાજુ કરતાં મોટી, તેની બરાબર અથવા તેનાથી નાની હોય તે પ્રમાણમાં પહેલી બાજુ સામેનો ખૂણો બીજી બાજુ સામેના ખૂણા કરતાં મોટો, બરાબર અથવા નાનો થશે. (પાંચમી પ્રતિજ્ઞાની પણ મદદ જોઈએ)

અનુમાન ૨ બીજું—વિષમ બાજુ ત્રિકોણના સઘળા ખૂણા વિષમ છે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૯ મી.

અનુમાન ૧ હું—એક ત્રિકોણની એક બાજુ સામેનો ખૂણો બીજી બાજુ સામેના ખૂણા કરતાં મોટો, બરાબર, અથવા નાનો હોય તે

ખીજી બાબુ કરતાં પહેલી બાબુ મોટી બરાબર અથવા નાની થશે. (૧૭ પ્રતિજ્ઞાની પણ મદદ જોઈએ.)

પ્રતિજ્ઞા ૨૫ મી.

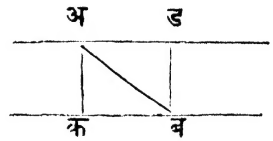
અનુમાન ૧ હું—એ ત્રિકોણોમાં એકની એ બાજુઓ અનુક્રમે ખીજની એ બાજુઓની બરાબર હોય અને તેઓની વચ્ચેનો અંતરખૂણો ખીજના અંતરખૂણા કરતાં મોટો, બરાબર અથવા નાનો હોય તે પ્રમાણમાં પહેલા ત્રિકોણનો પામો ખીજ ત્રિકોણના પાયાથી મોટો, બરાબર અથવા નાનો થશે. (ચોથી પ્રતિજ્ઞાની પણ મદદ જોઈએ.)

પ્રતિજ્ઞા ૨૬ મી.

અનુમાન ૧ હું—એ સમાંતર લીટીઓ માંહેલી એક અથવા ઉપર જો કોઈ રેખા લીટી લંબ હોય તો ખીજ કંઈ ઉપર પણ તે રેખા લીટી લંબ થશે; કેમકે



બુદ્ધિમંત્ર ખૂણા બરાબર છે. અનુમાન ૨ હું—એ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના સઘળા લંબો બરાબર છે. કેમકે, અથવા દોરો વચ્ચે તથા અથવા ખૂણાઓ બુદ્ધિમંત્ર છે, તેથી તેઓ બરાબર છે. અને વચ્ચે તથા અથવા તેજ કા-રણથી બરાબર છે અથવા બાબુ અને ત્રિકોણોમાં સામાન્ય છે તેથી (૨ પ્રતિ.પ્ર.) અથવા તથા વચ્ચે બાબુઓ બરાબર છે.

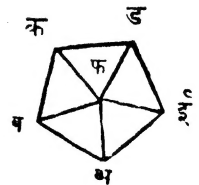


પ્રતિજ્ઞા ૩૦ મી.

અનુમાન ૧ હું—એક જ લીટી સાથેની એ સમાંતર લીટીઓ એક જ બિંદુની પાર જઈ શકતી નથી.

પ્રતિજ્ઞા ૩૨ મી.

અનુમાન ૧ હું—કોઈ પણ અથવા કંઈ સીધી લીટી આકૃતિના સઘળા માંહેના ખૂણાઓની સાથે ચાર કાટખૂણા મેળવીએ તો, આકૃતિમાં જેટલી બાજુઓ છે તેથી બમણા કાટખૂણા બરાબર તેઓ થશે.



એ આકૃતિની માંહે કોઈ પણ ક બિંદુના, અને ક, ક, ક, ક, ક તથા ક (૧૨વી.પ્ર.) સાંધો. એટલે, આકૃતિઓમાં જેટલી બાજુઓ છે તેટલા ત્રિકોણ બન્યા. અને તેથી તેના સઘળા ખૂણાઓનો સરવાળો (૩૨ પ્રતિ.પ્ર.) આકૃતિને જેટલી બાજુઓ છે તેથી બમણા કાટખૂણા બરાબર છે. પણ ક બિંદુ આ-ખૂણાઓ (૧૩ પ્રતિ. ના ૩ અનુ. પ્ર.) ચાર કાટખૂણા બરાબર છે;

જાહેર ખખર.

વિનતિ કે, અમે ગયા ફેબ્રુઆરીના શાળાપત્રમાં એ પુસ્તકો તૈયાર વગેરેની જાહેર ખખર મૂકી હતી; તેમાંથી એક પુસ્તક તૈયાર થયું તે અને “દેશીનામાનો સંક્ષેપ” એ નામનું બીજું પુસ્તક પણ મળકુર હેરખખર અનુસાર પ્રગટ કરવાના વિચારમાં છીએ. આ પુસ્તક શાળા-યોગી તેથી ઘણી ગરીબ સ્થિતિના વિદ્યાર્થીઓ પણ તેનો લાભ લેઈ શકે માટે, કીંમત ખડું જૂજ રાખેલી છે. જેની આ પુસ્તક ખરીદવાની ઇચ્છા હોય તેણે નીચે લખેલે ઠેકાણે કીંમત મોકલી અગર વેલ્યુપેએમલ મંગાવવા તજનીજ કરાવવી.

શબ્દકોટ— { કતા પાસે
દર. બેચર મેઘજી બુકસેલર પરામાં.
બાઈ નાનાલાલ નાગરદાસ સ્ટેશન સ્કૂલના પહેલા આસિ-
સ્ટન્ટ માસ્તર.

ખુંખાધ—બુકસેલર દામોદર ઇશ્વરદાસ લાઇબ્રેરીવાળા.

વડોદરા—રા. લીલાધર પ્રભાશંકર શ્રીમેલ ટ્રેનિંગ કોલેજ.

ભાવનગર—રા. રા. તારાચંદ્ર ત્રીકમદાસ ખાનગી કેળવણી દફતરે શિરસ્તેદાર.

વઢવાણ સ્ટેશન—વકીલ, તલકશી હીમજી.

નગર—ધુ. દુર્લભદાસ શામજી ધુ. કૃષ્ણીઆમાં.

—ગુલાબચંદ તારાચંદ ભાગલ પોળ.

વરનાં ગ્રાહકોએ ટપાલખર્ચનો અર્ધો આનો વિશેષ મોકલવો.

આદૃત ૧
ફ ગિંદુ આ-
ખખર છે.

